**PSI** **Février 2024**
**MATHEMATIQUES**

**Feuille d'Exercices**
**Intégrales à paramètre**

**Exercice 1.** Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \cos(x-t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'$.

**Exercice 2.** On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que $F$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

**Exercice 3.**

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire $(E)$ d'ordre 1 dont $f$ est solution.
   (b) Résoudre $(E)$ .

**Exercice 4.** Calcul de l'intégrale de Dirichlet.
On définit pour $x \geq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de $F$ en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de $F$ en 0 est $F(0)$. On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que $F$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 5.** La Fonction Gamma $\Gamma$ : On définit la fonction $\Gamma$ par

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\Gamma$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$
2. Montrer $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que $\Gamma$ est $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer ses dérivées à l'aide d'une intégrale.
5. Montrer que $\Gamma'' \geqslant 0$. $\Gamma$ est alors convexe.
6. Montrer que $\Gamma'$ s'annule en un unique $x_0 \in ]1,2[$. *On trouve numériquement que* $x_0 \simeq 0,86$ *et* $\Gamma(x_0) \simeq 1,46$.
7. Montrer que $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
8. Déterminer la limite de $\Gamma$ en $+\infty$.

**Exercice 6.** Soit $f$ continue sur $[0,+\infty[$, admettant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que $f$ est bornée sur $[0,+\infty[$.
2. Pour $x>0$, on définit $F(x)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ admet une limite , que l'on calculera) quand $x$ tend vers 0, puis quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 7.** (Mines Ponts 2016)
On pose : $\forall x>0, f(x)=\int_0^1 \ln t \ln(1-t^x)\,\mathrm{d}t$.

1. Définition de f
2. Écrire f comme la somme d'une série de fonctions.
3. Déterminer la limite de f en 0.

**Exercice 8.** (TPE 2016) On pose pour tout $x$ réel : $f(x)=\int_0^{\frac{pi}{4}} exp(-\frac{x^2}{\cos^2 t})\,\mathrm{d}t$ et $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Tracer le tableau de variation de f.
2. Calculer f en fonction de g : (on fera le changement de variable $u=x\tan t$ dans $f'$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$