CCP2017 - PSI

Problème 1

Présentation générale

On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2, on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble de matrices orthogonales.

Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité d'ordre n.
Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n et par $O_n(\mathbb{R})$ celui de matrices réelles orthogonales de taille n. Le groupe *spécial orthogonal* est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1.

Partie I - Un exemple en dimension 2

1. Soit t un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A.
2. Calculer $R = (I_2 + A)(I_2 - A)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.
3. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $M = (I_2+R_\theta)^{-1}(I_2-R_\theta)$.

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier > 0.

4. Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons

$$^t(AX)\overline{X}$$

   Montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).
6. Déduire de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors $I_n + A$ est inversible et

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

   Montrer que $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est une matrice orthogonale.
7. Calculer le déterminant de R.
8. Soit R une matrice orthogonale telle que $I_n + R$ soit inversible. Démontrer que la matrice $A = (I_n + R)^{-1}(I_n - R)$ est antisymétrique.
9. On suppose ici que $n = 3$ et que $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée par la base canonique. Soit r une rotation d'angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ autour d'un axe orienté par un vecteur u de norme 1 et soit $R \in O_3(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique.
   Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$R = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A)$$

Problème 2

Présentation générale

L'objet de ce problème est l'étude du phénomène de Gibbs. Dans la première partie, on démontre des lemmes de Riemann-Lebesgue. Dans la deuxième, on calcule l'intégrale de Dirichlet. Enfin, dans la troisième partie, on met en évidence le phéomène de Gibbs.

Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Partie 1 : résultats préliminaires

Dans ce qui suit, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ désigne une fonction continue 2π-périodique telle que

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0$$

10. Si $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^1, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt = 0$$

11. Montrer que la primitive de φ s'annulant en 0 est 2π-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, déduire de ce qui précède que pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\, dt = 0$$

12. Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soient $\varepsilon > 0$ et $g \in C^1([\alpha, \beta])$ telle que $\sup_{[\alpha,\beta]} |h - g| \leq \varepsilon$. Montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de φ telle que

$$\left| \int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\, dt \right| \leq m|\beta - \alpha|\varepsilon + \left| \int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\, dt \right|$$

En déduire que pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\, dt = 0$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Weierstrass qui affirme que pour tout segment $[\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

13. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin^2(nt)\, dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t)\, dt$$

Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F \ : \ x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$ soit bornée.

14. Montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, dt$ puis $\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ sont convergentes et que
$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, dt - \frac{F(a)}{a}$$
15. Montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$ sont convergentes et que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$$

    Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ soit absolument convergente.
16. Montrer que la fonction
$$\mathcal{L}(f) \ : \ x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt}\, dt$$
est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
17. On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
18. Soit $f \ : \ t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.
    (a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle
$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$
    (b) On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe C^2 et vérfient
$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$$
    Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)\, dt$ et $\beta(x) = \int_x^{+\infty} f_2(t)\, dt$ où f_1, f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.
    (c) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
    (d) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x > 0, \ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$
19. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a
$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$
20. Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. En déduire que
$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$
21. Déduire des questions précédentes que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Partie 3 : phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x \in \{0, \pi\} \end{cases} \tag{E.1}$$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

22. En calculant la dérivée de S_n, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \pi],\ S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\, dt$$

23. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

En déuire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

24. En déduire que $S_n(\pi/2)$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.
25. Calculer $S_n(\pi - x)$ en fonction de $S_n(x)$. En utilisant le résultat de la question 12, montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2]$,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$$

26. Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par $(E.1)$ sur $\mathbb{R}$.
27. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0, \pi]$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n}\frac{\sin(x)}{\sin(\frac{x}{2n})} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

converge simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

28. Montrer que φ est continue sur $[0, \pi/2]$ et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

29. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

30. Comparer
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{3}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$$
et montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)-f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right)>0.17$$
En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0,\pi/2[$.