Corrigé CC-INP TPC 2018

Exercice 1.

Partie I

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Tout calcul fait, on trouve que $\underline{P \text{ est inversible}}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $\underline{A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -17 & 8 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$. On a bien $\underline{A^3 = 2A - A^2}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ. Alors $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Donc $A^2X = A(AX) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Et de même, $A^3X = \lambda^3 X$. Puisque $A^3 + A^2 - 2A = 0$, il suit que $A^3X + A^2X - 2AX = 0$ c'est-à-dire $\lambda^3 X + \lambda^2 X - 2\lambda X = 0$, ou encore
$$(\lambda^3 - 2\lambda + \lambda^2)X = 0$$
Puisque $X \neq 0$, on en déduit que $\lambda^3 - 2\lambda + \lambda^2 = 0$ i.e. $\underline{\lambda^3 = 2\lambda - \lambda^2.}$

4. On a aisément $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$. Donc $\underline{\text{les solutions de } x^3 + x^2 - 2x = 0 \text{ sont } -2, 0 \text{ et } 1}$. On vient de voir que toute valeur propre λ de A vérifie $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$ donc $\underline{\mathrm{Sp}(A) \subset \{-2, 0, 1\}}$.

5. Après calculs, on trouve :
$$\underline{\ker(A + 2I) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \ker(A - I) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]}$$

6. (a) On déduit de la question précédente que $\underline{\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 1\}}$. A admet donc 3 valeurs propres distinctes. Etant une matrice d'ordre 3, $\underline{A \text{ est diagonalisable}}$.

   (b) La matrice A est diagonalisable donc semblable à une matrice diagonale dont la diagonale est formée des valeurs propres de A. Ainsi, A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Il existe donc Q inversible telle que $A = QA'Q^{-1}$, la matrice Q étant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A. Avec les calculs faits précédents, on a donc bien $Q = P$ et ainsi : $\underline{A = PA'P^{-1}}$.

Partie II

7. On considère le système différentiel :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 3x(t) - 5y(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & -x(t) + y(t) \end{array}\right.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on a $(S) \iff X' = AX$. Or :

$$X' = AX \iff X' = PA'P^{-1}X \iff P^{-1}X' = A'P^{-1}X.$$

Si on note $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on alors :

$$X' = AX \iff Y' = A'Y \iff Y' = A'Y \iff \left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & 0 \\ v'(t) & = & v(t) \\ w'(t) & = & -2w(t) \end{array}\right.$$

Donc

$$X' = AX \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & a \\ v(t) & = & be^t \\ w(t) & = & ce^{-2t} \end{array}\right.$$

Enfin, $X = PY$ donc :

$$\underline{X' = AX \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & a + be^t + ce^{-2t} \\ y(t) & = & a + ce^{-2t} \\ z(t) & = & a - be^t \end{array}\right.}$$

Partie III

8. $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, en notant 0_3 la matrice nulle de taille 3, on a $A0_3 = 0_3$ et $k0_3A = 0_3$, donc $\underline{0_3 \in \mathcal{C}_k}$. Ensuite, soit $(M, N, \lambda) \in \mathcal{C}_k^2 \times \mathbb{R}$, alors :

$$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda kMA + kNA = k(\lambda M + N)A,$$

donc $\underline{\lambda M + N \in \mathcal{C}_k}$ et finalement $\underline{\mathcal{C}_k \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

9. On a, en multipliant à gauche par P^{-1} puis à droite par P :

$$\begin{aligned} \underline{AM = kMA} &\iff PA'P^{-1} = kMPA'P^{-1} \\ &\iff A'P^{-1} = kP^{-1}MPA'P^{-1} \\ &\iff A' = kP^{-1}MPA' \\ &\iff \underline{A' = kNA'} \end{aligned}$$

10. On a $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, alors :

$$A'N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' \\ -2a'' & -2b'' & -2c'' \end{pmatrix}$$

et

$$kNA' = \begin{pmatrix} 0 & kb & -2kc \\ 0 & kb' & -2kc' \\ 0 & kb'' & -2kc'' \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\underline{A'N = kNA' \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} kb & = & 0 \\ kc & = & 0 \\ a' & = & 0 \\ (k-1)b' & = & 0 \\ (1+2k)c' & = & 0 \\ a" & = & 0 \\ (k+2)b'' & = & 0 \\ (k-1)c'' & = & 0 \end{array} \right.}$$

11. (a) D'après la question précèdente : <u>pour $k = 0$</u>,

$$A'N = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a' & = & 0 \\ b' & = & 0 \\ c' & = & 0 \\ a" & = & 0 \\ b'' & = & 0 \\ c'' & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc :

$$\underline{\mathcal{C}'_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

<u>pour $k = 1$</u>,

$$A'N = NA' \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ a' & = & 0 \\ c' & = & 0 \\ a" & = & 0 \\ b'' & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc :

$$\underline{\mathcal{C}'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}, (a, b', c'') \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

pour $k=-2$,

$$A'N=-2NA' \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ a' & = & 0 \\ b' & = & 0 \\ c' & = & 0 \\ a" & = & 0 \\ c'' & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc :

$$\underline{\mathcal{C}'_{-2}=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'' & 0 \end{pmatrix},(a,b'')\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

enfin pour $k=-1$,

$$A'N=-NA' \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ a' & = & 0 \\ b' & = & 0 \\ c' & = & 0 \\ a" & = & 0 \\ b'' & = & 0 \\ c'' & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc :

$$\underline{\mathcal{C}'_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},a\in\mathbb{R}\right\}}$$

(b) Une base de $\mathcal{C}'_1$ est

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

donc une base de $\mathcal{C}_1$ est :

$$\underline{\left\{P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\right\}}$$

De même, une base de $\mathcal{C}_{-1}$ est :

$$\underline{\left\{P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\right\}}$$