Exercice 2

1. (a) Si $M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ {}^tv_2 \\ \vdots \\ {}^tv_n \end{pmatrix}$. On en déduit que $\boxed{{}^tMM = \begin{pmatrix} {}^tv_1v_1 & \cdots & {}^tv_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ {}^tv_nv_1 & \cdots & {}^tv_nv_n \end{pmatrix}}$.

   (b) Rappel le produit scalaire dans une base orthonormée s'exprime matriciellement par $< x, y >={}^t XY$.

   En conséquence si $v_1, \dots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux, ${}^tv_iv_j = \begin{cases} \|v_i\|^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et donc ${}^tMM = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$ et donc $\det({}^tMM) = \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

   Or $\det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2$, <u>conclusion</u>: $\boxed{|\det M| = \|v_1\| \cdots \|v_n\|}$

2. Si $M = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$, alors ${}^tMM = \begin{pmatrix} a_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^2 \end{pmatrix}$ et comme on veut ${}^tMM = I_n$, on en déduit que pour tout i , $a_i = \pm 1$.

   <u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{Les matrices diagonales et orthogonales sont de la forme : } M = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix}}$

3.
```
def H(n,C): # C est la liste des colonne de la matrice
    for j in range(n):
        for i in range(n):
            if C[j][i]!=1 and C[j][i]!=-1:
                return 0
    for j in range(n-1):
        for k in range(j+1,n):
            s=0
            for i in range(n):
                s=s+C[j][i]*C[k][i]
            if s!=0:
                return 0
    return 1
Exemples de matrices:
M2=[[1,1],[1,-1]]
M3=[[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]
M4=[[1,-1,1,-1],[1,-1,-1,1],[-1,-1,-1,-1],[1,1,-1,-1]]
In [2]: H(2,M2)
Out[2]: 1
In [3]: H(3,M3)
Out[3]: 0
In [4]: H(4,M4)
Out[4]: 1
```

4. (a) Soit v un vecteur colonne de M, $v = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ donc $\|v\| = \sqrt{1 + \cdots + 1}$.

   <u>Conclusion</u>: $\boxed{\|v\| = \sqrt{n}}$

   (b) D'après la question 1.(b), on a : $\boxed{|\det M| = (\sqrt{n})^n = n^{n/2}}$

5. On a $< v_1, v_i >= \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} = \sum_{j=1, m_{j,i}=1}^{n} m_{j,i} + \sum_{j=1, m_{j,i}=-1}^{n} m_{j,i} = 0$. Comme les $m_{j,i}$ valent tous ± 1, on conclut :

   $\boxed{\text{Le nombre de } m_{j,i} \text{ égaux à 1 est égal au nombre de } m_{j,i} \text{ égaux à } -1}$

6. Soit $M=(m_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{H}_n$. Considérons la matrice $U=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ avec pour tout j : $a_j=\pm 1$

et posons $M_0=UM=\begin{pmatrix} a_1m_{1,1} & \cdots & a_1m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_nm_{n,1} & \cdots & a_nm_{n,n} \end{pmatrix}$.

Montrons que $UM\in\mathcal{H}_n$

• Ses coefficients sont dans $\{-1,1\}$ ($a_im_{i,j}=\pm 1\times\pm 1=\pm 1$).

• ${}^t(UM)UM) ={}^t M({}^tUU)M ={}^t MM$ car d'après le 2. , U est orthogonal.

D'après le 1. , on en déduit que les vecteurs colonnes de UM sont 2 à 2 orthogonaux : si on note $v_1,\dots,v_n$ les colonnes de M et $v'_1,\dots,v'_n$ les colonnes de UM alors pour tout $i\neq j$:

$< v'_i, v'_j > = < v_i, v_j > = 0$.

Il suffit pour finir de prendre pour tout i : $a_i=m_{i,1}$ de sorte que la première colonne de $M_0=UM$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion: $\boxed{\text{Il existe une matrice dans } \mathcal{H}_n \text{ qui a pour première colonne le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}$.

7. Si $\mathcal{H}_n$ est non vide avec le 6. , il existe une matrice dans $\mathcal{H}_n$ qui a pour première colonne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et avec le 5. la deuxième colonne a autant de termes égaux à 1 que de termes égaux à -1.

Conclusion: $\boxed{\text{Si } \mathcal{H}_n \text{ est non vide alors sa dimension doit être paire}}$

8. (a) $\det(M_0)=\begin{vmatrix} 1 & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2}-1 & \cdots & m_{1,n}-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_{n,2}-1 & \cdots & m_{n,n}-1 \end{vmatrix}$

en effectuant les opérations $C_j \longleftarrow C_j - C_1$ pour tout $j\in[\![2,n]\!]$

Or pour tout i et $j\geqslant 2$: $m_{i,j}-1\in\{0,-2\}$

On en déduit que $\det(M_0)=\begin{vmatrix} 1 & 2k_{1,2} & \cdots & 2k_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2k_{n,2} & \cdots & 2k_{n,n} \end{vmatrix}$ avec $k_{i,j}\in\mathbb{Z}$.

Par linéarité, on peut factoriser chaque colonne, de 2 à n, par 2 d'où

$\det(M_0) = 2^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & k_{1,2} & \cdots & k_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k_{n,2} & \cdots & k_{n,n} \end{vmatrix} = 2^{n-1}K$ avec $K\in\mathbb{Z}$ car le déterminant se calcul uniquement à l'aide de produits, sommes et différences de ses coefficients.

Conclusion: $\boxed{\det(M_0) \text{ est un entier relatif multiple de } 2^{n-1}}$.

(b) Si $\mathcal{H}_n$ est non vide, avec le 7. , $n=2p$ est pair.

Avec le 4. (b) et le 8. (a) , on a : $\det(M_0)=n^{n/2}=(2p)^p = 2^{n-1}K$.

On en déduit que $p^p=2^{p-1}K$ et comme $n>2$ et pair $n\geqslant 4$ et donc $p\geqslant 2$ d'où $p-1\geqslant 1$.

On a donc p^p qui est pair d'où p est pair : $p=2q$ et $n=4q$.

Conclusion: $\boxed{n \text{ est un entier naturel multiple de } 4}$