Exercice 1

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ, $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1; n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Déterminer la valeur du réel α.

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p + q$.
En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r - k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

7. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$b_{i,j} = \mathbb{P}([(X, Y) = (i, j)]).$$

7.1. Déterminer le rang de la matrice B.

7.2. Déterminer la valeur de $\mathrm{Tr}(B)$, la trace de la matrice B.

Exercice 2

1. Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.

On n'utilisera pas de fonction spécifique de python déterminant ce maximum.

2. Écrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices `[i_1,...,i_r]` avec `i_1<...<i_r` telle que pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, `L[i_k]` soit non nul.

Par exemple si `L = [0,1,3,0,7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1,2,4]`.

3. Écrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur `M = maxi(L)+1` où, pour tout $i \in [\![0;M]\!]$, `T[i]` est le nombre d'occurrences de l'entier `i` dans la liste `L`.

Par exemple, si `L = [3,1,4,1,5]`, alors `T = [0,2,0,1,1,1]`.

On pourra utiliser la fonction `maxi`.

4. Soit `L` une liste d'entiers naturels.

4.1. Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.

4.2. On veut que ce nombre `n` soit indépendant de `M = maxi(L)+1`.
Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

5. Soit A une liste d'entiers naturels. On définit la suite de Robinson $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la suite A par récurrence comme suit :

— $L_0 = A$.

— Si L_n est construite, alors :

  — on détermine $T_n = \texttt{nb\_oc}(L_n)$.

  — on détermine $I_n = \texttt{ind}(T_n)$.

  — si $I_n = [i_1, \dots, i_r]$, alors $L_{n+1} = \big[T[i_r], i_r, \dots, T[i_1], i_1\big]$.

Par exemple si $A = [4,4,1,2]$, alors :

— $L_0 = [4,4,1,2]$

— $L_1 = [2,4,1,2,1,1]$ (il y a deux « 4 », un « 2 » et un « 1 » dans la liste L_0)

— $L_2 = [1,4,2,2,3,1]$ (il y a un « 4 », deux « 2 » et trois « 1 » dans la liste L_1)

5.1. On donne $A = [2,0,4,1,3,3,2,3,1,1]$. Déterminer L_3 et L_{2018}.

5.2. On donne $B = [2,4,1,1,1,2]$. Si l'on suppose que $L_1 = B$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.3. On donne $C = [2,4,1,0]$. Si l'on suppose que $L_1 = C$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.4. Proposer alors une fonction `rob(A,n)` qui prend en arguments une liste d'entiers naturels `A` et un entier naturel `n` et qui renvoie l'élément L_n de la suite de Robinson associée à `A`.