

Problème 1 *Séries entières***I. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$**

Dans ce problème, on étudie $u_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t) dt \geq 0$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Etablir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
5. En déduire que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$
6. Donner à partir de la question précédente un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
7. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

II. Série entière

Dans cette partie, on étudie la série entière de rayon de convergence R définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n,$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

8. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est-elle convergente ?
9. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
10. Etablir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in]-1, 1[$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(t)} dt - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\cos(t))^n}{1 - x \cos(t)} dt$$
11. En déduire l'égalité
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(t)} dt \text{ pour tout } |x| < 1.$$
12. Montrer que $S(x) = \int_{-1}^1 \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2} du$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable
 $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right).$
13. En déduire que l'expression de S est donnée par :
$$\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$