Problème 1 *Séries entières*

I. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans ce problème, on étudie $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, et étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Etablir que $(n+1)\ u_{n+1} = n\ u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)\ u_{n+1}u_n$, pour $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
5. En déduire que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$
6. Donner à partir de la question précédente un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
7. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$

II. Série entière

Dans cette partie, on étudie la série entière de rayon de convergence R définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n,$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

8. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est-elle convergente ?
9. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
10. Etablir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in]-1,1[$:
    $$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(t))^n}{1-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$
11. En déduire l'égalité
    $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ pour tout $|x| < 1$.
12. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x)+(1+x)\,u^2}\,\mathrm{d}u$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
13. En déduire que l'expression de S est donnée par :
    $\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$