Méthodes numériques
Résolution numérique d'équations différentielles

Compétences

❏ Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.

❏ Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1.

❏ Utiliser la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate` (sa spécification étant fournie).

Exercices

❏ Exercice 1 ❏ Exercice 2 ❏ Exercice 3

Résumé du cours

1. Résolution numérique d'équations différentielles

La méthode d'Euler est une procédure numérique permettant de résoudre numériquement et approximativement des équations différentielles à partir d'une condition initiale.

1.1. Discrétisation

La mémoire des ordinateur étant finie, il est indispensable de discrétiser le problème pour le résoudre numériquement. Discrétiser consiste à considérer uniquement les instants $t_i = t_0 + i\Delta t$ et à associer à une fonction $y(t)$ une suite $y_i = y(t_i)$.

Δt est appelé **pas de temps**. Le pas de temps est l'équivalent de la période d'échantillonnage.

Schéma : Discrétisation

1.2. Problème d'Euler

Un problème d'Euler est une équation différentielle d'ordre 1 muni d'une condition initiale : on cherche la fonction y telle que $y'(t) = f(y, t)$ et $y(t_0) = y_0$. La fonction recherchée peut éventuellement être un vecteur et donc avoir plusieurs composantes.

Exemple

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}u$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}$$

Les équations différentielle d'ordre supérieur peuvent être mises sous la forme de problème d'Euler en introduisant un vecteur dont les coordonnées sont des dérivées successives.

Application ✍[1]

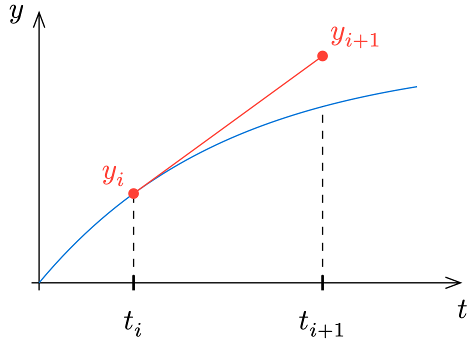
Mettre sous forme de problème d'Euler les équations différentielles suivante.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kv^2$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -k\vec{v} + m\vec{g}$$

$$a\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} + b\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + dy = e$$

1.3. Méthode d'Euler



La méthode d'Euler consiste à approximer la courbe localement par sa tangente. Cette approximation s'appuie sur la formule de Taylor à l'ordre 1.

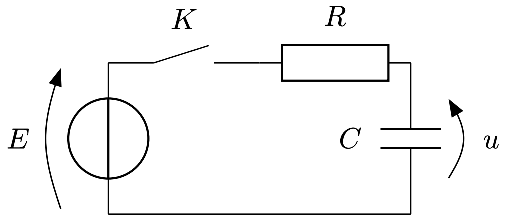
Schéma d'Euler ♥ ✍[2]

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot f(y_i, t)$$

Exercices

1. 💻 Circuit RC

On cherche à modéliser la charge d'un condensateur dans un circuit RC série soumis à une tension continue E.



À $t = 0$, l'interrupteur K est fermé. Le condensateur est initialement déchargé.

1/ Montrer que u vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}u + \frac{1}{RC}E$$

2/ Que vaut $u(t = 0^+)$?

On souhaite résoudre numériquement cette équation différentielle à l'aide de la méthode d'Euler explicite. On note $u_i = u(i \cdot \Delta t)$ la tension discrétisée.

3/ Établir une relation de récurrence sur u_i.

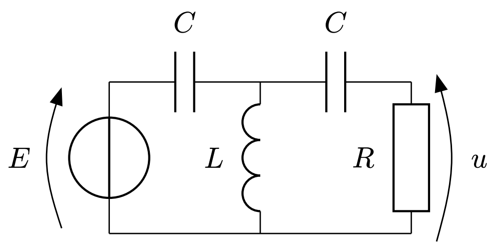
4/ Écrire une suite d'instructions permettant de calculer les valeurs successives de u_i. On prendra $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 1\,\mathrm{\mu F}$, $E = 5\,\mathrm{V}$, $\Delta t = 0.2\,\mathrm{ms}$ et on effectuera 25 itérations.

5/ Tracer l'évolution de u en fonction du temps. Comparer avec la solution analytique que vous calculerez et tracerez également.

6/ Observer qualitativement l'effet de la valeur de Δt sur la précision de la solution numérique.

2. 💻 Circuit électrique d'ordre 3

On s'intéresse au circuit électrique d'ordre 3 représenté ci-dessous.



Les valeurs des composants sont $R = 10\,\Omega$, $L = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}$ et $C = 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$. La source de tension fournit une tension constante $E = 10\,\mathrm{V}$.

L'évolution de u est régie par l'équation différentielle

$$RLC^2\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}t^3} + 2LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$$

On suppose que les conditions initiales sont $u(t = 0) = 0$, $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 3\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ et $\left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = 0$. L'objectif de cet exercice est de déterminer l'évolution de $u(t)$ au cours du temps.

1/ On note $v(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $w(t) = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$. Mettre le problème sous la forme d'un problème d'Euler en exprimant $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$.

2/ On note `Y` `np.array([u, v, w])`. Définir une fonction `dY_dt(Y,t)` qui retourne le tableau $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$ en prenant comme entrée le temps t et le tableau Y.

3/ Écrire une suite d'instructions permettant de calculer l'évolution de $Y(t)$ entre $t = 0$ et $t = 1\,\mathrm{ms}$ avec un pas de temps $\Delta t = 1\,\mathrm{\mu s}$ en utilisant la méthode d'Euler explicite.

4/ Tracer l'évolution de $u(t)$ au cours du temps.

La fonction `odeint(func, y0, t)`[1] de la bibliothèque `scipy.integrate` permet de résoudre des problèmes d'Euler en appliquant des méthodes plus sophistiquées mais reposant sur le même principe. Elle prend en entrée

- `func`: une fonction qui retourne la dérivée de l'état en fonction de l'état et du temps,
- `y0`: l'état initial,
- `t`: un tableau des instants où l'on souhaite connaître la solution.

5/ Reprendre la question 3 en utilisant la fonction `odeint` pour calculer l'évolution de $Y(t)$.

3. Tir cadré ? ★

On étudie un tir au football. La vitesse initiale du ballon est de $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ selon l'axe x (horizontal) et de $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ selon l'axe z (vertical). Le ballon est sur le sol juste avant le tir.

Dans un premier temps, on ne prend en compte que la gravité.

1/ Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ du ballon. Exprimer la dérivée de la vitesse.

On résout numériquement l'équation différentielle en utilisant la fonction `solve_ivp` de la bibliothèque `scipy.integrate`.

2/ Compléter le code suivant.

```python
from scipy.integrate import solve_ivp, trapezoid
import numpy as np

g = 9.81 # m/s^2
rho = 1.2 # kg/m^3
v0 = np.array([20, 0, 12]) # m/s

def dv_dt(t, v):
    a = ... # accélération
    return a

sol = solve_ivp(dv_dt, [0, 2], v0, max_step=0.01)

t = sol.t
vx = sol.y[0, :]
vy = sol.y[1, :]
vz = sol.y[2, :]
```

Il est maintenant nécessaire de calculer la position du ballon en intégrant la vitesse en utilisant la méthode des rectangles.

3/ Compléter le code suivant. Attention, les temps calculés par la fonction `solve_ivp` ne sont pas forcément régulièrement espacés.

```python
x = [0]
y = [0]
z = [0]
```

[1] Documentation complète disponible à l'adresse https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html

```python
for i in range(1, len(sol.t)):
    x.append(...)
    y.append(...)
    z.append(...)
```

Pour vérifier si le tir est cadré, on trace la trajectoire du ballon grâce au code suivant.

```python
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")

ax.plot(x, y, z)

# Tracé des cages
x_cages = 14.5
y_cages = 0.3
l_cages = 7.32
h_cages = 2.44
ax.plot(
    [x_cages]*4,
    [y_cages, y_cages, y_cages + l_cages, y_cages + l_cages],
    [0, h_cages, h_cages, 0],
    color="orange")

# Mise en forme
ax.set_xlabel("x (m)")
ax.set_ylabel("y (m)")
ax.set_zlabel("z (m)")
ax.set_title("Trajectoire 3D")
ax.set_zlim(0, max(z)*1.1)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

4/ Le tir est-il cadré ?

On prend maintenant en compte les frottements avec l'air $\vec{F} = -\frac{1}{2}\pi\rho C_x R^2 \, \|\vec{v}\| \, \vec{v}$. On donne les valeurs numériques suivantes : $\rho = 1.2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $C_x = 0.47$, $R = 0.11\,\mathrm{m}$ et $m = 145\,\mathrm{g}$

5/ Modifier la fonction `dv_dt` pour inclure la force de traînée.

On pourra utiliser la fonction `np.linalg.norm(v)` pour calculer la norme du vecteur vitesse v.

Le tir est-il maintenant cadré ?

Le footballeur a mis de l'effet dans la balle en lui imprimant une rotation de $\Omega = 100\ \mathrm{min}^{-1}$ autour de l'axe (Oz). Cette rotation engendre une force de portance appelée force de Magnus et s'exprimant comme $\frac{1}{2}C\rho R^3 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ avec $C \approx 1$.

6/ Modifier la fonction `dv_dt` pour inclure la force de Magnus.

Le tir est-il maintenant cadré ?