PSI **Mai 2023**
MATHEMATIQUES

Préparation à l'oral n°1
Probabilités

1 Niveau Mines/ Centrale

Exercice 1. (Mines-Pont PSI 2015)

1. Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Soit ABCD un carré sur lequel on se déplace comme suit :
   - Si on se trouve sur A à l'étape n, on va en B avec la proba $\frac{1}{2}$, en D avec la proba $\frac{1}{3}$ et on reste en A avec la proba $\frac{1}{6}$.
   - Si on se trouve sur B à l'étape n, on va en C avec la proba $\frac{1}{2}$, en A avec la proba $\frac{1}{3}$ et on reste en B avec la proba $\frac{1}{6}$.
   - Si on se trouve sur C à l'étape n, on va en D avec la proba $\frac{1}{2}$, en B avec la proba $\frac{1}{3}$ et on reste en C avec la proba $\frac{1}{6}$.
   - Si on se trouve sur D à l'étape n, on va en A avec la proba $\frac{1}{2}$, en C avec la proba $\frac{1}{3}$ et on reste en D avec la proba $\frac{1}{6}$. On note a_n la probabilité d'être en A à l'étape n.

   Calculer la limite de la suite $(a_n)_n$.

Exercice 2. (Mines Ponts 2016)
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance. Calculer l'espérance de S_n.
2. Calculer $\forall (i,j), i \neq j, cov(Y_i, Y_j)$.
3. En déduire la variance de S_n.

Exercice 3. (Centrale PSI 2018)

Soit a et b deux entiers strictement positifs. On place b boules blanches et b boules noires dans une urne. On effectue une succession de tirages avec remise et chaque fois que l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches supplémentaires dans l'urne. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n l'événement « on n'a tiré que des boules blanches au cours des n premiers tirages »et on pose $p_n = P(A_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{b+an}{2b+an} p_n$.
2. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_n$.

Exercice 4. (Centrale PSI 2018)
Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de vad indépendantes toutes de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Soient λ et t deux réels strictement positifs.

1. Donner la loi de S_n et préciser son espérance et variance.
2. Calculer l'espérance de $\exp(\lambda(X_1 - \frac{1}{2}))$.
3. Déterminer l'espérance de la variable $\exp(\lambda(S_n - E(S_n)))$.
4. Trouver une fonction f_t telle que $P(S_n - E(S_n) > nt) \leqslant e^{n f_t(\lambda)}$.
5. Déterminer le maximum de $f_t(\lambda)$ pour $|t| \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 5. (Mines-Ponts PSI 2021)
Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de vad indépendantes toutes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On considère la matrice aléatoire $M = (X_i X_j)_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Donner la loi du rang et de la trace de M.
2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?

Exercice 6. (Mines-Télécom PSI 2019 / Centrale 2017)
Soit $p \in]0,1[$. On se donne une pièce qui tombe sur pile avec la proba p. On la lance jusqu'à obtenir 2 fois pile et on note X le nombres de faces obtenus.

1. *IMT Donner la loi du temps d'attente du n^{ime} succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes*
2. *IMT En déduire* Donner la loi de X.
3. Montrer l'existence et donner la valeur de l'espérance de X.
4. Uniquement à Centrale : Si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0à n dans une urne. On pioche une boule au hasard et Y désigne le numéro de la boule piochée. Donner la loi de Y et son espérance.

2 Niveau IMT/CCINP

Exercice 7. (Mines-Télécom PSI 2019)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent une loi géométrique de paramètre p. Trouver la probabilité pour que les matrices $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables.

Exercice 8. (Mines-Télécom PSI 2021)
Soit $f : t \mapsto \frac{t}{2-t^2}$.

1. Développer f en série entière, préciser le rayon de convergence.
2. Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f .
3. Calculer l'espérance de X .
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \dfrac{X}{2}$.

Exercice 9. (CCINP PSI 2021)
Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On réalise n tirages avec remise.

1. Soit B_i l'événement « on tire i boules blanches ». Calculer $P(B_i)$
2. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{1}{2}\left((1+x)^n + (1-x)^n\right)$
3. Calculer la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

Exercice 10. (CCINP PSI 2021)
Dans une succession de n lancers « pile / face »indépendants, on note p_n la probabilité qu'on n'obtienne pas deux piles consécutifs.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. On considère les événements $F_i =$« on obtient face au $i^{\text{ième}}$ lancer »avec $i \in \{1, 2\}$.
   Montrer que $(F_1 \cap F_2, \overline{F_1} \cap F_2, F_1 \cap \overline{F_2}, \overline{F_1} \cap \overline{F_2})$ est un système complet d'événements de Ω.
3. En utilisant un système complet d'événements un peu mieux choisi, établir la relation :
   $p_{n+2} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}p_{n+1}$
4. Montrer que la suite $(p_n)_n$ converge vers 0.

Exercice 11. (CCINP PSI 2019)
On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On dispose d'un jeton mobile sur un axe gradué de 0 à n. La position initiale du jeton est 0. On effectue des tirages avec remise dans l'urne et à chaque tirage , si le numéro de la boule est inférieur ou égal à la position du jeton, on déplace le jeton d'une graduation vers la gauche , sinon on déplace le jeton d'une graduation vers la droite.

1. Donner les positions possibles du jeton après p tirages pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ puis pour tout p.
2. On note X_p la position de jeton après p tirages. Exprimer $P(X_{p+1} = 0)$ en fonction de $P(X_p = 1)$ et Exprimer $P(X_{p+1} = n)$ en fonction de $P(X_p = n - 1)$.
3. Pour $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, exprimer $P(X_{p+1} = k)$ en fonction de $P(X_p = k - 1)$ et $P(X_p = k + 1)$.
4. Rappeler pourquoi la fonction génératrice d'une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ existe au moins sur l'intervalle $[-1, 1]$. On note G_p la fonction génératrice de X_p. Pourquoi G_p est-elle polynomiale ?
5. On admet que $G_{p+1}(t) = tG_p(t) + \frac{1-t^2}{n}G'_p(t)$. Montrer que $E(X_{p+1}) = 1 + (1 - \frac{2}{n})E(X_p)$.
6. Déterminer $E(X_p)$.

Exercice 12. (CCINP PSI 2018)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :
$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X, Y) = (j, k)\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}2^{j+1}\ k!}$.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique. En déduire espérance, variance de X ainsi que celles de Y.
3. Calculer $P(X = Y)$.