PSI **Mai 2023**
MATHEMATIQUES

Préparation à l'oral n°2
Algèbre linéaire / Réduction

1 Niveau Mines/ Centrale

Exercice 1. (Mines Ponts PSI 18)
Soit E un ev de dim finie et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}\,(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (pour l'inclusion) jusqu'à un certain rang r au delà duquel la suite est constante. Qu'en déduire pour $(\mathrm{Im}\,(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$?
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(u^k)$ est stable par u.
3. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{rg}\,(u^k)-\mathrm{rg}\,(u^{k+1})=\dim(\mathrm{Ker}\,u\cap\mathrm{Im}\,(u^k))$.

Exercice 2. (Centrale PSI 2021)

1. Soit $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}\,A=0$ et $\mathrm{tr}\,A^2\neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soient $n\geqslant 2$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\mathrm{tr}\,A^k=0$ pour tout $k\in\{1,..,n-1\}$ et $\mathrm{tr}\,A^n\neq 0$. Montrer que A admet une vp non nulle puis que A est diagonalisable. *Ind : Notez $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ les vp non nulles distinctes, de multiplicités $n_1,\cdots,n_p$ et considérez une matrice de Vandermonde.*

Exercice 3. (Mines Pont PSI 2021) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u\in\mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0\in E$ tel que $(x_0,u(x_0),...,u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrez existence et unicité d'un n-uplet $(p_0,...,p_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tels que $u^n(x_0)=p_0x_0+p_1u(x_0)+\ +p_{n-1}u^{n-1}(x_0)$.
2. Montrez $P(X)=X^n-\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_kX^k$ annule u. Montrez si Q annule u, alors Q est multiple de P.
3. En déduire C N S pour que u soit diagonalisable.
4. On note $\mathbb{K}[u]=\{Q(u),Q\in\mathbb{K}[X]\}$. Déterminez $\dim\mathbb{K}[u]$
5. Montrez que le Commutant de u est $\mathbb{K}[u]$.

Exercice 4. (Mines Pont PSI 2018) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3=A+I$. Montrer que A est inversive et donner le signe de $\det(A)$.

Exercice 5. (Mines Pont PSI , Centrale, ENSAM, CCINP)
Soit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ (*autres : sur* $\mathbb{R}^+$)
On définit T qui à $f\in E$ associe $T(f)$ où $T(f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ si $x\neq 0$ et $T(f)(0)=f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre . (*autres : Déterminer le spectre de T*)
3. Montrer que 1 est valeur propre et donner l'espace propre associé.
4. Déterminer les autres valeurs propres.
5. (*autres : T est-il injectif ? surjectif ?*)

2 Niveau IMT/CCINP

Exercice 6. (CCINP PSI 18)

1. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde. Soit $n\in\mathbb{N}$. On souhaite montrer que la famille $((X+k)^n)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre. Soient $(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k(X+k)^n=0$.
2. Montrer que, pour tout $0\leqslant p\leqslant n$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k(X+k)^p=0$.
3. Montrer que, pour tout $0\leqslant p\leqslant n$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k k^p=0$ et conclure.

Exercice 7. (CCINP 2021)
Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Montrez A semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouvez cette expression en observant que $A = I_3 + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 8. (ENSEA)

1. Reconnaître l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base canonique par la matrice M dont les coefficients diagonaux valent $1 - \frac{1}{n}$ et tous les autres $-\frac{1}{n}$.
2. Donner les éléments propres de f.
3. Exprimer $f(x)$ pour tout x. (on pourra introduire $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$).

Exercice 9. (ENSEA)
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathbb{C}$-espace espace de dimension n, tel que $(f - Id)^3 \circ (f - 2Id) = 0$ et $(f - Id)^2 \circ (f - 2Id) \neq 0$, est-il diagonalisable ?

Exercice 10. (IMT 2019)
Soit E un ev muni d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$, $v \in E$ et f l'endomorphisme tel que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n)$.

1. Donner le rang de f.
2. Discuter de la diagonalisabilité de f en fonction de v

Exercice 11. (CCINP PSI 19)

1. Soit $u \in \mathscr{L}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si u est diagonalisable alors u^2 aussi.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u^2 - \lambda^2 Id) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda Id) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \lambda^2 Id)$.
4. Montrer que si u est bijectif, alors la réciproque de 1 est vraie.

Exercice 12. (CCINP PSI 19)
Soit u un endomorphisme d'un ev E de dim finie. On suppose que 0 est racine simple d'un polynôme annulateur de u.

1. $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$.
2. Montrer que si u est nilpotent, alors u est nul.

Exercice 13. (CCINP PSI 19)
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $3u^3 = u^2 + u + Id_E$.

1. Montrer que u est bijectif.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est combinaison linéaire de u^2, u et Id_E.
3. Est-il possible que u soit diagonalisable ?
4. Qu'en est-il sur un $\mathbb{C}$-ev ?