PSI **Mai 2023**
MATHEMATIQUES

Préparation à l'oral n°3
Algèbre euclidienne

1 Niveau Mines/ Centrale

Exercice 1. (Mines Ponts PSI 19)
Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si deux des trois propriétés suivantes sont vérifiées alors la troisième l'est aussi.

1. f est une isométrie
2. $f^2 = -Id_E$
3. pour tout $x \in E$, le vecteur $f(x)$ est orthogonal à x.

Exercice 2. (Centrale PSI 22)
On note $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $E = \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire usuel : $< f, g >= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour $f \in E$, on définit deux fonctions $A(f)$ et $B(f)$ sur I en posant :$\forall x \in I$,

$$A(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ et } B(f)(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que : $\forall (f, g) \in E^2,\ < A(f), g >=< f, B(g) >$. En déduire que les valeurs propres de $B \circ A$ sont toutes positives.
2. Montrer que : $\forall x \in I, \forall f \in E,\ (A(f)(x))^2 \leqslant x^2 \int_0^x (f(t))^2\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire l'existence d'un réel K indépendant de f tel que : $\|A(f)\| \leqslant K\|f\|$.
4. Montrer que A est un endomorphisme continu de E.

Exercice 3. (Mines Ponts PSI 16)
Soit E un espace euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux de E.

1. Rappeler la définition d'un projecteur orthogonal et une de ses applications.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$
3. Montrer que les valeurs propres de u appartiennent à $[0, 2]$.
4. Trouver $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u - 2Id_E)$.

Exercice 4. (Mines Ponts PSI 16)
Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n. Montrer que la somme des carrés de ses valeurs propres est égale à la somme des carrés de ses coefficients.

Exercice 5. (Mines Ponts PSI 16)
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), A = (a_{ij})$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.
2. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$.

2 Niveau IMT/CCINP

Exercice 6. (CCINP PSI 22)(Pacôme)
Soient $(A, B) \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \frac{1}{3}(A + 2B) \in O_n(\mathbb{R})$. On pose $C = A^T B$.

1. Calculer $A^T B + B^T A$.
2. En déduire un polynôme annulateur de C.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(C - I_n)$ et $\operatorname{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires orthogonaux.
4. Montrer que $A = B$ (Pacôme n'est pas sûr)

Exercice 7. (IMT PSI 22)(Pacôme)
Soit E un espace euclidien et f une isométrie vectorielle . On pose $c = f - Id_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} c$ et $\operatorname{Im} c$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. Soit $x \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$. Montrer que $(p_n(x))_n$ converge vers une limite à déterminer.

Exercice 8. (CCINP PSI 22)(Thomas)
Soient $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$. On pose $\varphi(M,N) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}n_{ij}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij} = 0\}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{M\in H} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2$.

Exercice 9. (CCINP PSI 21)

1. Montrer que $\varphi : (f,g) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2 \mapsto \int_0^1 x^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x \,\mathrm{d}x$ est définie et la calculer.
3. Soit F le sous-espace des fonctions affines sur $[0,1]$. Déterminer la projection orthogonale de $x \mapsto x\ln x$ sur F.

Exercice 10. (CCINP PSI 21) Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ des réels deux à deux distincts. On pose :

$$< P, Q >= \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$.
   (a) Justifier rapidement que est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer sa dimension ainsi que son orthogonal.
   (b) Calculer la distance de X^n à F.

Exercice 11. (CCINP PSI 21)Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})\ \forall S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ |\mathrm{tr}\,(\Omega S)| \leq \mathrm{tr}\,(S)$.
2. Montrer que $\forall S \in S_n \setminus \{0\},\ \mathrm{rg}\,(S) \geqslant \frac{(\mathrm{tr}\,(S))^2}{\mathrm{tr}\,(S^2)}$.

Exercice 12. (IMT PSI 22) Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que s'il existe $k \geqslant 2$ tel que $A^k = I_n$, alors $A^2 = I_n$. Caractériser la matrice A.

Exercice 13. (IMT PSI 21) On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique, on travaille relativement à la base canonique.
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $y = x\tan\theta$, avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.