PSI **Mai 2023**
MATHEMATIQUES

Préparation à l'oral n°4
Suites et séries de fonctions

1 Niveau Mines/ Centrale

Exercice 1. (Naval PSI 19)
Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Limite de S en $+\infty$?
3. Limite de S en 0^+ puis donner un équivalent.

Exercice 2. (Mines Ponts PSI 19)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha + x^\alpha}$

1. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$?
2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}^+$? Convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$? Convergence uniforme sur certaines parties de $\mathbb{R}^+$?
3. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 3. (Mines-Ponts PSI 2021)
Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(nx)^2}$

1. Déterminer le domaine de définition puis étudier la continuité de f .
2. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ que l'on déterminera.
3. Exhiber un équivalent simple de f en 0.

Exercice 4. (Centrale PSI 2021)
Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2 + x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, a]$ pour tout $a \geqslant 0$.
3. Montrer que $0 \leqslant (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $a_n \geqslant 0$ et $(a_n)_n$ est croissante.
4. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5. (Mines-Ponts PSI 2019 / CCINP 2016)
Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur D et strictement décroissante.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (*Mines : donner un équivalent*)
4. Étudier l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.
5. *Mines : Donner un équivalent de f en 0.*CCINP : Donner la limite en 0. (On utilisera que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$).
6. Étudier l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$.

2 Niveau IMT/CCINP

Exercice 6. (Mines Télécom PSI 19)
On cherche à résoudre l'équation $(E) : \forall x \in \mathbb{R}^+, u(x) = 1 + \int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$ avec $u \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définie par $u_0 = 1$ (fonction constante) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:$\forall x \in \mathbb{R}^+, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$.
   Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une certaine fonction u sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que u est solution de (E).
3. Donner les fonctions développables en série entière dont la restriction à $\mathbb{R}^+$ est solution de (E).

Exercice 7. (Mines Télécom PSI 2021)
On définit $\varphi(t) = \dfrac{1}{t(t+x)}$ avec $x > 0$ et $t \in [1, +\infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$.

1. Déterminer Nature et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Indication : décomposer en élément simples.
2. Quel est le domaine de définition de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$?
3. Étudier la continuité de S.
4. Montrer que S est C^1 sur $\mathbb{R}_*^+$?

Exercice 8. (CCINP PSI 2021)
Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1. Montrer que $0 \leqslant \dfrac{u_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$ pour tout n.
2. Soit$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n x^n}{n!}$. Montrer que f est définie sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et est solution de l'équation $y' = y^2$.
3. En déduire une expression de u_n.

Exercice 9. (CCINP PSI 2021)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0,1]$. Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1 - e^{-nx}}{x^a(1+x^2)}$.

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
2. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $]0,1]$?
3. Montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$
4. Pour $a \in [0,1[$, montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
5. Qu'en est-il pour $a = 1$?