PSI
MATHEMATIQUES

Mai 2023

Préparation à l'oral n°5

Séries Numériques

Application directe du cours possible : Nature des séries de terme général $u_n = \frac{1}{n^a(\ln(n))^b}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1 Niveau Mines/ Centrale

Exercice 1. (Mines Ponts 2021)
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$. Étudier la convergence de la série de terme général $(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$.

Exercice 2. (IMT 2021 / Centrale 2015)
Nature de la série de terme général $\sin\left(\pi(1+\sqrt{2})^n\right)$.

Exercice 3. (Centrale)On pose $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = 2R_n - \frac{(-1)^n}{n+2}$ et $R_n + R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. Donner un équivalent de R_n.
4. Nature de $\sum\limits_{n\geq 0} R_n$.

Exercice 4. (Mines-Ponts)Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de $\sum u_n$ où :

$$u_n = \frac{a + (-1)^n\sqrt{n}}{a + (-1)^n\sqrt{n} + n}$$

2 Niveau IMT/CCINP

Exercice 5. (CCINP PSI 19)

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique racine x_n dans $[0,1]$.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_n$ et donner un équivalent.
3. Étudier la série de terme général x_n.
4. Étudier la série de terme général $(-1)^n x_n$.

   (on pourra prouver en utilisant $f_n(x) = x^n + x\sqrt{n} - 1, f_{n+1}(x_n) = (x_n - 1) - x_n\sqrt{n}\left(x_n - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$)

Exercice 6. (CCINP PSI 19)
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de $(I_n)_n$.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$ (on fera la changement de variable $u = \tan t$).
3. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
4. Montrer que la série de terme général $(-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme .