PSI
MATHEMATIQUES
Mai 2023

Préparation à l'oral n°6
Séries Entières

1 Niveau Mines/ Centrale

Exercice 1. (Mines-Ponts) On appelle , partitions de l'ensemble $\{1,,n\}$, toute famille de parties non vides de $\{1,,n\}$ deux à deux disjointes et dont la réunion est $\{1,,n\}$.
On note p_n le nombre de partitions de l'ensemble $\{1,,n\}$.

1. Décrire les modes de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ de rayon R sur l'intervalle $]-R,R[$.
2. On pose $p_0=1$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, p_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}p_k$.
3. On note $f : x\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{p_n}{n!}x^n$ et R le rayon de convergence.
   (a) Montrer que $R\geqslant 1$.
   (b) Calculer $f(x)$ pour $x\in]-R,R[$.

Exercice 2. On donne une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $(na_n)_n$ tende vers 0.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.
2. On note $f(x)$ sa somme. Montrer qu'au voisinage de 1^-, $f(x)=o(ln(1-x))$.
3. Réciproquement, si, au voisinage de 1^-, $f(x)=o(ln(1-x))$, $(na_n)_n$ tend-elle vers 0 ?

Exercice 3. (Centrale 2021)

1. Montrer la convergence de la suite de terme général $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$.
2. On pose $a_1=-1$ et pour $n\geq 2, a_n=-\frac{1}{n}-\ln(1-\frac{1}{n})$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 1}\ln(n)x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$. On note f et g leur somme respective.
3. Que peut-on dire de $g(1)$? En déduire un équivalent simple de f en 1.

Exercice 4. (Mines-Ponts PSI 2021)

1. Montrer que la fonction $x\mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière au voisinage de 0.
2. Encadrer son rayon par deux réels strictement positifs.

2 Niveau IMT/CCINP

Exercice 5. (CCINP)Nature et somme de la série $\sum n^{(-1)^n}x^n$.

Exercice 6. (CCINP) Rayon de convergence et calcul de la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$

Exercice 7. (CCINP)(Thomas) Soit la fonction $f(x)=arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$

1. Montrer que cette fonction est C^1 sur un intervalle que l'on précisera et donner sa dérivée.
2. Trouver des polynômes non nuls a,b,c tels que f soit solution de l'équation différentielle du premier ordre : $a(x)y'+b(x)y=c(x)$.
3. Montrer que l'unique solution de cette équation qui s'annule en 0, est une fonction impaire développable en série entière au voisinage de 0.
4. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.
5. Donner ce développement en série entière.

Exercice 8. (CCINP) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ et $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+1}}$

1. Montrer que $I_{n,k}$ est bien définie.
2. Calculer $I_{n,k}$
3. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$?
4. Montrer l'égalité suivante :$\forall x \in]-R, R[, \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx}\,\mathrm{d}t$