PSI
MATHEMATIQUES
Juin 2023

Préparation à l'oral n°7
Intégrales généralisées

1 Niveau Mines/ Centrale

Exercice 1. (Mines-Ponts) Soit a, b des réels strictement positifs.
On considère $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t}\, \mathrm{d}t$. Existence et calcul de I *indication : pour le calcul, considérer l'intégrale de ε à $+\infty$ et transformer l'expression .*

Exercice 2. (Mines-Ponts) Montrer que $f : x \mapsto f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

Exercice 3. (Mines-Ponts PSI 2021)
Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 4. ((Mines-Ponts PSI)On pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$
2. Montrer que $I_n \sim \dfrac{\alpha}{n}$ où $\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

Exercice 5. (Mines Ponts 2021)
Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer f définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Montrer f dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et déterminer f' ?
2. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ est définie et la calculer.

2 Niveau IMT/CCINP

Exercice 6. (CCINP)

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$ est convergente.
2. En utilisant $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 7. (CCINP) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^5 \ln t}{(1+t^6)^2}\, \mathrm{d}t$ existe puis que $I = 0$.

Exercice 8. (IMT)Justifiez la convergence et calculez $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - t\arctan\frac{1}{t})\, \mathrm{d}t$.

Exercice 9. (CCINP) Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in]0, 1[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2 - 1}$ et $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2 - 1}$.

1. Montrer que f et f_n sont intégrables sur $]0, 1[$.
2. On considère $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x$. Montrer que $(I_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Calculer $I_{k+1} - I_k$ et en déduire que $I_n = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 10. (CCINP) Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\, \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\, \mathrm{d}x$

1. Justifier l'existence de I et J.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I + J$ et en déduire la valeur de I.