PSI
MATHEMATIQUES
Juin 2023

Préparation à l'oral n°8
Équations différentielles

1 Niveau Mines/ Centrale

Exercice 1. (Mines-Ponts) Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $xy' - ny = 0$.

Exercice 2. (Mines-Ponts PSI 2021)
Soit $(E) : ty'' + 2y' - ty = 0$

1. Trouver les solutions de (E) développables en série entière.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_*^+$, sur $\mathbb{R}_*^-$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. (Centrale 2021)
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $(E_n) : t^2u'' + tu' - n^2u = 0$.

1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $u_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ soit solution sur (E_n) sur $\mathbb{R}_*^+$. Résoudre (E_n) sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Soit f et g deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$.
   On pose et $\hat{f} : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $\hat{g} : (r, \theta) \mapsto g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Relier $\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}$ à $\frac{\partial \hat{g}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}$ à $\frac{\partial \hat{g}}{\partial r}$.
3. Montrer que $k_n : r \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(r, \theta)e^{in\theta}\,\mathrm{d}\theta$ vérifie (E_n) et en déduire qu'il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $r > 0$, $k(r) = a_n r^{|n|}$.

2 Niveau IMT/CCINP

Exercice 4. (CCINP) Soit le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -2t \\ 4t & 1+3t \end{pmatrix}$

1. Donner les éléments propres de $A(t)$.
2. En déduire qu'il existe P indépendant de t telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.
3. Résoudre le système différentiel.

Exercice 5. (CCINP) On considère l'équation différentielle $(E) : (x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. Trouver une équation différentielle (E') vérifiée par $x \mapsto z(x) = \frac{1}{x}y(x)$.
3. Résoudre (E'). En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 6. (IMT)Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + x\,y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 7. (IMT) Soit $(E) : (2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$.

1. Chercher les solutions polynomiales et les solutions du type $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$

Exercice 8. (IMT) Soit le système $(S) : \begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{cases}$ avec les conditions initiales $x(0 = 1, y(0) = z(0) = 0$.

1. Justifier l'existence et l'unicité des solutions de (S).
2. Montrer que si (x, y, z) est une solution alors $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont des fonctions constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?
3. Résoudre (S).