PSI
MATHEMATIQUES
Juin 2023

Préparation à l'oral n°9
Intégrales à paramètre

Exercice 1. (Centrale) Soit $J(a,b) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$.

1. Étudier la convergence de $J(a,b)$.
2. Calculer $J(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
3. Mettre $J(n,1)$ sous forme de somme finie où $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Mettre $J(a,b)$ sous forme de somme d'une série numérique.
5. Étudier $\lim\limits_{a\to 0^+} J(a,b)$, $\lim\limits_{a\to +\infty} J(a,b)$, $\lim\limits_{b\to 0^+} J(a,b)$, $\lim\limits_{b\to +\infty} J(a,b)$

Exercice 2. (Mines-Ponts) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.
2. Montrer que f et g sont solutions de $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.
3. En déduire que $f = g$ et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. (CCINP/ Mines-Ponts) On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\mathrm{sh}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Donner l'ensemble de définition de F.
2. Etudier la dérivabilité de F et calculer F'. (Mines : Absent)
3. Calculer la limite de F en $+\infty$. (Mines : Donner un équivalent)
4. Donner une expression de F

Exercice 4. (CCINP PSI 2021)
On définit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Donner l'ensemble de définition de Γ.
2. Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ en déduire $\Gamma(n)$.
3. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.
4. Montrer que Γ est C^2 sur son domaine de définition. Donner $\Gamma''(x)$.
5. Montrer que Γ' s'annule en un seul point $x_0 \in]1,2[$.
6. Donner les limites de Γ aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 5. (IMT) Pour tout x réel, on pose : $S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que S et C sont bien définies sur $\mathbb{R}$. . Sont-elles continues ?
2. Montrer que S est dérivable. Exprimer S' au moyen de C .
3. Montrer que : $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$.
4. En déduire S et C , exprimées au moyen d'une intégrale.