| 1 | Algèbre

Soient a_0, a_1, a_n $n+1$ réels deux à deux distincts

1. Montrer que si $b_0, b_1, ..., b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leq n$ et $\forall i \in [\![0, n]\!], P(a_i) = b_1$
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque $\forall i \in [\![0, n]\!], b_i = 0$ si $i \neq k$ et $b_k = 1$.
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\sum\limits_k a_k^p L_k = X^p$.

| 2 | Algèbre

On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

| 3 | Diagonalisation simultanée

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$. On considère deux endomorphismes f et g de E tels que
1) f et g soient diagonalisables
2) $f \circ g = g \circ f$.
On souhaite montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices représentatives de f et g sont diagonales.

1. Si f est une homothétie, qu'en est-il ?
2. Si f n'est pas une homothétie, montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g puis procéder par récurrence.

| 4 | Calcul différentiel

Soit (S) la surface d'équation : $x^4 - x^3 + xy - z = 0$.
Montrer que (S) est une surface régulière.
Déterminer les points de (S) où le plan tangent est parallèle au plan (xOy).

| 5 | Courbe paramétrée

2tudier et représenter la courbe $\mathcal{C}$ d'équations : $x(t) = t - \frac{t^3}{3}$ et $y(t) = t^2$.
Calculer la longueur de la boucle.