Phénomènes de transport 2
Transfert thermique par conduction

Compétences

- ❏ Énoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire.
- ❏ Utiliser avec rigueur les notation d et δ en leur attachant une signification.
- ❏ Décrire les trois modes de transfert thermique.
- ❏ Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur $\vec{j}_Q$ à travers une surface orientée.
- ❏ Énoncer l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.
- ❏ Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
- ❏ Énoncer et utiliser la loi de Fourier.
- ❏ Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
- ❏ Établir, pour un milieu évoluant à volume constant, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.
- ❏ Utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque à l'aide de l'opérateur divergence et son expression fournie.
- ❏ Établir l'équation de diffusion thermique avec ou sans terme source.
- ❏ Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.
- ❏ Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.
- ❏ Exploiter la continuité du flux thermique.
- ❏ Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait.
- ❏ Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide.
- ❏ Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique et énoncer les conditions d'application de l'analogie.
- ❏ Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement.
- ❏ Exploiter des associations de résistances thermiques en série ou en parallèle.
- ❏ Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température.
- ❏ Justifier l'ARQS.
- ❏ Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.
- ❏ Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle.
- ❏ Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation.
- ❏ Établir une distance caractéristique d'atténuation.
- ❏ 💻 À l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.

Exercices

❏ Exercice 1 ❏ Exercice 2 ❏ Exercice 3 ❏ Exercice 4 ❏ Exercice 5 ❏ Exercice 6

Résumé du cours

1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

1.1. La différentielle mathématique

Différentielle d'une fonction d'une variable ♥

Hypothèse : « f est une fonction de x dérivable »

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Application ✍1

Déterminer la différentielle de la fonction sin.

Différentielle d'une fonction de deux variables ♥

Hypothèse : f est une fonction de x et de y dérivable par rapport à x et à y

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Application ✍2

Déterminer la différentielle de $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$.

La formule de la différentielle d'une fonction de deux variables peut être généralisée pour un nombre quelconque de variables.

Une quantité $A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y$ est une **forme différentielle**. On note les formes différentielle avec un δ : $\delta f = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y$. Une quantité $A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y$ est une différentielle ssi il existe f telle que $\mathrm{d}f = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y$.

Application ✍3

Les formes différentielles suivantes sont-elles des sont-elles des différentielles ?

$$\delta f = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$$

$$\delta g = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

L'intégrale d'une différentielle ne dépend pas du chemin suivi : $\int_{(PQ)} \mathrm{d}f = f(Q) - f(P)$.

L'intégrale d'une forme différentielle $\int_{(PQ)} \delta f$ dépend du chemin suivi.

Exemple

On note $W = \int \delta W$: le travail dépend a priori du chemin suivi.

On note $W = -\int \mathrm{d}E_p$ car pour une force conservative, le travail est indépendant du chemin suivi.

En physique, les grandeurs notées $\mathrm{d}f$ représentent des **variation** infinitésimales.

Exemple

Entre t et $t + \mathrm{d}t$, la température augment de $\mathrm{d}T$.

En physique, les grandeurs notées δf représentent des **quantités** infinitésimales.

Exemple

Entre t et $t + \mathrm{d}t$, une chaleur δQ rentre dans le système.

Exception : pour les variables d'intégration, cette règle est enfreinte. On note $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ des dimensions, $\mathrm{d}S$ une surface, $\mathrm{d}V$ un volume, $\mathrm{d}t$ une durée alors que ce ne sont pas des variations.

1.2. Premier principe

Formulation infinitésimale du premier principe de la thermodynamique ♥

Hypothèses :
- *Le système est fermé.*
- *La transformation est infinitésimale*

$$\mathrm{d}E = \delta W + \delta Q$$

Avec
- $\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}U$ la variation d'énergie totale (J)
- $\mathrm{d}E_c$ la variation d'énergie mécanique macroscopique (J)
- $\mathrm{d}U$ la variation d'énergie interne (J)
- δW le travail reçu (J)
- δQ la chaleur reçue (J)

La variation d'énergie $\mathrm{d}E$ est une petite variation et s'écrit bien avec un d. La chaleur δQ et le travail δW sont des petites quantités et s'écrivent bien avec un δ.

1.3. Second principe

Formulation infinitésimale du second principe de la thermodynamique ♥

Hypothèses :
- *Le système est fermé.*
- *La transformation est infinitésimale*

$$\mathrm{d}\mathcal{S} = \delta\mathcal{S}_e + \delta\mathcal{S}_c$$

Avec
- $\mathcal{S}$ l'entropie ($\mathrm{J\,K^{-1}}$)
- $\delta\mathcal{S}_e = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$ l'entropie échangée ($\mathrm{J\,K^{-1}}$)
- $\delta\mathcal{S}_c > 0$ l'entropie créée ($\mathrm{J\,K^{-1}}$)
- δQ la chaleur reçue (J)
- T_{ext} la température extérieure (K)

La variation de d'entropie $\mathrm{d}\mathcal{S}$ est une petite variation et s'écrit bien avec un d. La chaleur δQ, l'entropie échangée $\delta\mathcal{S}_e$ et l'entropie créée $\delta\mathcal{S}_c$ des petites quantités et s'écrivent bien avec un δ.

1.4. Équilibre thermodynamique local

1.4.1. Les 3 échèles

Échelle microscopique ($\sim 10^{-10}$ m) C'est l'échelle des molécules du système. Ces molécules sont animées d'un mouvement erratique. Les grandeurs thermodynamiques n'ont pas de sens pour une molécule.

Échelle macroscopique ($\sim 10^{-2}$ m) C'est l'échelle des systèmes étudiés dans leur ensemble.
Si le système est à l'équilibre thermodynamique, on peut définir ses grandeurs thermodynamiques (température, pression, …) et les étudier comme vu en première année.
Lorsqu'il y a des transferts thermiques à l'intérieur d'un système, ce système n'est pas à l'équilibre thermodynamique. Certaines des grandeurs thermodynamiques de ce système (température, pression, …) ne sont donc pas définies.

Échelle mésoscopique ($\gg 10^{-10}$ m et $\ll 10^{-2}$ m) L'échelle mésoscopique est une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique.
Comme l'échelle mésoscopique est très grande devant l'échelle microscopique, les fluctuations dues à l'agitation des molécules sont faibles.
Comme l'échelle mésoscopique est très petite devant l'échelle macroscopique, les grandeurs y sont uniformes (ce sont les mêmes en un point ou un autre du système mésoscopique).

L'échelle mésoscopique sert

- pour décrire les systèmes qui ne sont pas à l'équilibre thermodynamique
- pour passer des propriétés microscopiques au propriétés macroscopiques

Les grandeurs extensives associées à un système mésoscopique sont notées avec un δ car ce sont des quantités infinitésimales : δU, δV, ...

1.4.2. Équilibre thermodynamique local

Si un système macroscopique peut être découpé en systèmes mésoscopiques qui sont tous à l'équilibre thermodynamique, on dit qu'il y a équilibre thermodynamique local. A l'équilibre thermodynamique local, les grandeurs thermodynamiques sont définies pour les systèmes mésoscopiques.

A l'équilibre thermodynamique local, les grandeurs thermodynamiques sont des champs[1]. Par exemple, la température au point M $T(M)$ est définie comme la température d'un système mésoscopique centré sur le point M. Cette température existe car à l'équilibre thermodynamique local, tous les systèmes mésoscopiques sont à l'équilibre thermodynamique. De plus, cette température ne dépend pas du choix, arbitraire, du système mésoscopique.

Ces champs n'ont un sens que pour les grandeurs intensives car ils dépendraient du choix du volume mésoscopique. On transforme donc les grandeurs extensives en grandeurs intensives en divisant soit par la masse soit par le volume.

grandeur extensive	grandeur massique	grandeur volumique
énergie interne U (J)	énergie interne massique u ($\mathrm{J\,kg^{-1}}$)	énergie interne volumique u_V ($\mathrm{J\,m^{-3}}$)
masse m (kg)		masse volumique mu ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
entropie S ($\mathrm{J\,K^{-1}}$)	entropie massique s ($\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$)	entropie volumique s_V ($\mathrm{J\,K^{-1}\,m^{-3}}$)

2. Transport de chaleur

2.1. Les 3 modes de transport de chaleur

La chaleur peut se transporter d'un système à un autre de 3 façons :

Par diffusion (= par conduction) L'énergie se transmet de proche en proche. Le milieu est macroscopiquement immobile.

EXEMPLE

La queue d'un ustensile de cuisine devient chaude.

Par conducto-convection (= par convection) Un fluide est en mouvement. En se déplaçant, le fluide transporte de l'énergie avec lui.
Le fluide peut se mettre en mouvement spontanément si certaines zones sont plus chaudes que d'autres. Ça s'appelle la convection naturelle.

EXEMPLE

L'eau qui chauffe dans la casserole, les courants marins.

Le fluide peut être mis en mouvement par autre chose. Ça s'appelle la convection forcée.

EXEMPLE

L'air du sèche-cheveux.

[1]Un champ est une fonction définie sur tous les points de l'espace.

Par rayonnement Tous les matériaux émettent un rayonnement électromagnétique. La fréquence et l'intensité du rayonnement électromagnétique dépendent de la température du matériau. Le rayonnement électromagnétique transporte de l'énergie. Le rayonnement électromagnétique peut se propager dans le vide ou dans les milieux transparents. Le rayonnement électromagnétique peut être absorbé par un matériau, il lui apporte alors de la chaleur.

Exemple

La chaleur du Soleil, les plaques vitro-céramiques.

2.2. Le vecteur densité de courant thermique

Le vecteur densité de courant thermique $\vec{\jmath}_Q$ est la chaleur transitant par unité de surface et de temps.

Chaleur traversant une surface infinitésimale ♥

$$\delta Q = \vec{\jmath}_Q \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t$$

Avec
- $\vec{\jmath}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$)
- $\mathrm{d}S$ la surface élémentaire ($\mathrm{m^2}$)
- δQ la chaleur reçue (J)

Puissance traversant une surface infinitésimale ♥ ✍4

$$\delta \Phi = \vec{\jmath}_Q \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Avec
- $\vec{\jmath}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$)
- $\mathrm{d}S$ la surface élémentaire ($\mathrm{m^2}$)
- $\delta\Phi$ la puissance traversant une surface élémentaire (W)

La puissance (aussi appelée flux thermique[2]) qui traverse une surface finie est l'intégrale du flux sur une surface infinitésimale.

Puissance traversant une surface finie ♥

$$\Phi = \iint_S \delta\Phi$$

Avec
- Φ la puissance traversant une surface (W)
- $\delta\Phi$ la puissance traversant une surface élémentaire (W)

Application ✍5

Déterminer le flux thermique du vecteur densité de courant $\vec{\jmath}_Q = 2\pi r h (T - T_{\text{ext}})\vec{e}_r$ sur un cylindre de rayon R, de hauteur h centré sur l'axe $(O, \vec{e}_z)$ du repère.

2.3. Loi de Fourier

La loi de Fourier est une loi phénoménologique[3]. La loi de Fourier relie le vecteur densité de courant de chaleur $\vec{\jmath}_Q$ et la température T dans le cas du transfert thermique par **conduction**.

Loi de Fourier ♥

Hypothèses :
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local.*
- *Le transport de chaleur se fait par conduction.*

$$\vec{\jmath}_Q = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T$$

Avec
- $\vec{\jmath}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$)
- λ la conductivité thermique ($\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$)
- T la température (K)

La conductivité thermique λ permet de mesurer la facilité avec laquelle un matériau transporte la chaleur.

[2]En physique, les intégrales doubles sur des surfaces s'appellent des flux.
[3]Phénoménologique veut dire qui vient de l'expérience.

Ordres de grandeur de la conductivité thermique ♥

$$\lambda_{\text{air}} \sim 10^{-2}\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}\,K^{-1}}$$

$$\lambda_{\text{eau}} \sim 10^{-1}\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}\,K^{-1}}$$

$$\lambda_{\text{béton}} \sim 10^{0}\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}\,K^{-1}}$$

$$\lambda_{\text{acier}} \sim 10^{1}\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}\,K^{-1}}$$

Avec
- λ la conductivité thermique ($\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$)

Le signe « $-$ » dans la loi de Fourier traduit le sens de déplacement de la chaleur : toujours du chaud vers le froid.

Application ✍6

Déterminer le vecteur densité de courant thermique pour le champ de température

$$T(x,y,z) = \frac{xy}{z}\frac{T_0}{l}$$

3. Équation de la diffusion thermique

3.1. Bilan d'énergie

Le premier principe de la thermodynamique traduit la conservation de l'énergie, c'est-à dire que l'énergie ne peut pas être créée ou détruite, elle ne peut que se transformer d'une forme à l'autre.

Exemple

Quand un vélo freine, son énergie mécanique se transforme en énergie thermique.

Quand une grandeur se conserve, on peut en faire le bilan.

Faire le bilan d'une grandeur dans un système veut dire compter combien de cette grandeur rentre dans ce système et combien y est créée. On ne s'intéresse qu'au flux rentrant car un flux sortant est un flux entrant de sens opposé.

En faisant un bilan sur un volume infinitésimale entre t et $t+dt$, on aboutit à l'équation locale de conservation de l'énergie.

Équation locale de conservation de l'énergie ♥ ✍7

Hypothèses :
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local.*
- *Le système est incompressible et macroscopiquement immobile.*

$$\mu\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{\jmath}_Q + \mathcal{P}_v$$

Avec
- u l'énergie interne volumique ($\mathrm{J\,m^{-3}}$)
- $\vec{\jmath}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$)
- $\mathcal{P}_V$ la puissance volumique convertie en chaleur ($\mathrm{W\,m^{-3}}$)

3.2. Équation de la diffusion thermique

Lorsqu'on remplace le vecteur densité de courant thermique $\vec{\jmath}_Q$ grâce à la loi de Fourier dans l'équation locale de conservation de l'énergie, on aboutit à l'équation de la diffusion thermique.

Équation de la diffusion thermique ♥ ✍[8]

Hypothèses :
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local.*
- *Le système est incompressible et macroscopiquement immobile.*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D_{\text{th}} \Delta T = \frac{\mathcal{P}_v}{\mu C_V}$$

Avec
- T la température (K)
- $D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\mu C_V}$ la diffusivité thermique ($\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)
- $\mathcal{P}_V$ la puissance volumique convertie en chaleur ($\mathrm{W\,m^{-3}}$)
- μ la masse volumique ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
- C_V la capacité thermique massique à volume constant ($\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$)
- λ la conductivité thermique ($\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$)

Le coefficient D_{th} est appelé diffusivité thermique ou coefficient de diffusion thermique.

3.3. Analyse en ordres de grandeurs

Approximation d'une dérivée par le taux d'accroissement ♥

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{F}{l}$$

Avec
- f une fonction de x quelconque
- F un ordre de grandeurs des variations de f
- l un ordre de grandeurs de la distance (m)

Si on analyse en ordres de grandeurs l'équation de diffusion thermique, on peut trouver la durée que met une variation de température à parcourir une certaine distance.

Durée caractéristique de propagation d'une variation de température ✍[9]

Hypothèses :
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local.*
- *Le système est incompressible et macroscopiquement immobile.*

$$\tau = \frac{l^2}{D_{\text{th}}}$$

Avec
- τ le temps caractéristique de diffusion thermique (s)
- l un ordre de grandeurs de la distance (m)
- $D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\mu C_V}$ la diffusivité thermique ($\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)

Comme la durée caractéristique dépend de l^2, l'onde de température ralenti en se propageant : elle met 4 fois plus de temps pour parcourir une distance 2 fois plus grande.

Application ✍[10]

Si je plonge une cuillère de 20 cm en acier ($\mu = 8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $C_V = 4 \cdot 10^2\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$) dans une casserole d'eau bouillante, quel est l'ordre de grandeur de la durée au bout de laquelle la queue de la cuillère devient chaude ?

3.4. Irréversibilité

La vidéo du lien ci-dessous illustre l'irréversibilité de différents phénomènes.

https://youtu.be/i6rVHr6OwjI

Si, quand on remplace t par $-t$ dans l'équation on obtient une équation différente, l'équation est irréversible.

Si une vidéo d'un phénomène irréversible est passée à l'envers, on s'en rend compte.

Application ✍11

L'équation de diffusion thermique est-elle irréversible ?

Application ✍12

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ est-elle irréversible ?

L'équation de la diffusion thermique est irréversible.

3.5. Conditions aux limites

Le flux thermique est toujours continu.

Continuité du flux thermique ♥ ✍13

$$\Phi(x^+) = \Phi(x^-)$$

Avec
- Φ la puissance traversant une surface (W)

Lorsque la température est continue à une interface, on dit qu'il y a **contact thermique parfait**.

4. ARQS et résistance thermique

4.1. Approximation du régime quasi-stationnaire (ARQS)

Dans l'ARQS, les grandeurs ne varient pas très vite avec le temps. Dans l'ARQS, on peut négliger les dérivées partielles par rapport au temps ($\frac{\partial}{\partial t}$). Dans l'ARQS, la durée que met une variation de température à parcourir le système est très courte devant la durée caractéristique de variation de la température.

Condition de l'ARQS ♥ ✍14

$$l^2 \ll \frac{D_{\text{th}}}{\mathcal{T}}$$

Avec
- l un ordre de grandeurs de la distance (m)
- $D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\mu C_V}$ la diffusivité thermique ($\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)
- $\mathcal{T}$ la durée caractéristique de variation de la température (s)

4.2. Conservation du flux de $\vec{\jmath}_Q$

Équation locale de conservation de l'énergie en régime stationnaire ✍15

Hypothèses :
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local.*
- *Le système est incompressible et macroscopiquement immobile.*
- *En l'absence de terme source[4].*
- *Dans l'ARQS.*

$$\operatorname{div} \vec{\jmath}_Q = 0$$

Avec
- $\vec{\jmath}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}}$)

En régime stationnaire, le flux de chaleur est conservatif.

4.3. Résistance thermique

Dans l'ARQS, la différence de température entre les extrémités d'un système est proportionnelle avec le flux thermique. Le facteur de proportionnalité s'appelle la **résistance thermique**.

[4]Sans terme source veut dire $\mathcal{P}_V = 0$.

Schéma : Convention récepteur pour une résistance thermique

Résistance thermique d'un cylindre ♥ ✍[16]

Hypothèses :
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local.*
- *Le système est incompressible et macroscopiquement immobile.*
- *En l'absence de terme source.*
- *Dans l'ARQS.*

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\Phi$$

avec

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{S\lambda}$$

Avec
- T la température (K)
- R_{th} la résistance thermique ($\mathrm{K\,W^{-1}}$)
- Φ la puissance traversant une surface (W)
- λ la conductivité thermique ($\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$)
- L la longueur du cylindre (m)
- S la section du cylindre ($\mathrm{m^2}$)

4.4. Association de résistances thermiques

Si deux résistances thermiques sont en série, elles sont traversées par le même flux thermique.

Schéma : Résistances thermiques en série

Exemple

Double vitrage, isolation d'un mur, …

Association en série de résistances thermiques ♥ ✍[17]

Hypothèses :
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local.*
- *Le système est incompressible et macroscopiquement immobile.*
- *En l'absence de terme source.*
- *Dans l'ARQS.*

$$R_{\text{th, éq}} = R_{\text{th, 1}} + R_{\text{th, 2}}$$

Avec
- R_{th} la résistance thermique ($\mathrm{K\,W^{-1}}$)

Application ✍[18]

Déterminer la résistance thermique équivalente d'un double vitrage. Chaque vitre a une épaisseur 1 cm, de même que l'air entre les deux. La surface de la fenêtre est $1\,\mathrm{m^2}$. $\lambda_{\text{verre}} = 1\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Si deux résistances thermiques sont en parallèle, elles sont soumises à la même différence de température.

Schéma : Résistances thermiques en parallèle

Exemple

Fenêtre dans un mur, ...

Association en parallèle de deux résistances thermiques ♥ ✍19

Hypothèses :
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local.*
- *Le système est incompressible et macroscopiquement immobile.*
- *En l'absence de terme source.*
- *Dans l'ARQS.*

$$\frac{1}{R_{\text{th, éq}}} = \frac{1}{R_{\text{th, 1}}} + \frac{1}{R_{\text{th, 2}}}$$

Avec
- R_{th} la résistance thermique ($\mathrm{K\,W^{-1}}$)

Application ✍20

Déterminer la résistance thermique équivalente d'une gigoteuse de surface $0.5\,\mathrm{m}^2$ et de TOG[5] 2 et d'un bonnet de surface $400\,\mathrm{cm}^2$ et de TOG 1.

4.5. Circuit RC thermique

Le circuit RC thermique correspond à une capacité thermique en contact avec un thermostat à travers une résistance thermique.

Exemple

Le circuit RC thermique peut modéliser le refroidissement du contenu d'une tasse ou le réchauffement d'un petit pois dans une casserole d'eau.

Évolution de la température dans un circuit RC thermique ✍21

Hypothèses :
- *En l'absence de terme source*
- *Dans l'ARQS*
- *Le système est à l'équilibre thermodynamique local*
- *Le système est incompressible et macroscopiquement immobile*
- *La température est uniforme dans le système*

$$T(t) = T_0 + \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{R_{\text{th}} C_V}\right)\right) T_{\text{ext}}$$

Avec
- T la température (K)
- T_0 la température initiale du système (K)
- T_{ext} la température extérieure (K)
- R_{th} la résistance thermique ($\mathrm{K\,W^{-1}}$)
- C_V la capacité thermique massique à volume constant ($\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$)

[5] Le TOG est une unité inverse de la résistance thermique surfacique. Un TOG de 1 correspond à $0.1\,\mathrm{m^2\,K\,W^{-1}}$

4.6. Analogie avec l'électrocinétique

On peut faire une analogie entre l'électrocinétique et la thermique.

	Thermique	Électrocinétique
Flux	$\Phi = \iint_S \vec{\jmath}_Q \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \quad (\mathrm{W})$	$I = \iint_S \vec{\jmath}_{\acute{e}lec} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \quad (\mathrm{A})$
Vecteur densité de courant	$\vec{\jmath}_Q = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T \quad (\mathrm{W\,m^{-2}})$	$\vec{\jmath}_{\acute{e}lec} = -\gamma \overrightarrow{grad}\, V \quad (\mathrm{A\,m^{-2}})$
Conservation	$\operatorname{div} \vec{\jmath}_Q = 0$	$\operatorname{div} \vec{\jmath}_{\acute{e}lec} = 0$
Résistance	$R_{\mathrm{th}} = \frac{L}{\lambda S} \quad (\mathrm{K\,W^{-1}})$	$R = \frac{L}{\gamma S} \quad (\Omega)$
Loi d'Ohm	$T_1 - T_2 = R_{\mathrm{th}}\Phi \quad (\mathrm{K})$	$V_1 - V_2 = RI \quad (\mathrm{V})$
Capacité	$C_V \quad (\mathrm{J\,K^{-1}})$	$C \quad (\mathrm{F})$
Équation différentielle pour un RC	$R_{\mathrm{th}} C_V \frac{\partial T}{\partial t} + T = T_{\mathrm{ext}}$	$RC \frac{\partial u}{\partial t} + u = E$

Méthodes

1. Faire un bilan infinitésimale

Pour faire un bilan d'une grandeur sur un système infinitésimal :

1. S'assurer que la grandeur est conservative et si besoin, le justifier.
2. Représenter le système.
3. Déterminer les surfaces qui sont traversées par un flux et déterminer leur aire.
4. En déduire le flux net rentrant en multipliant les aires par les vecteurs densité de courant. Attention aux orientations des surfaces !
5. Déterminer le volume du système.
6. En déduire la grandeur nette « créée » par unité de temps dans le système.
7. Écrire l'égalité entre la variation de la grandeur entre t et $t + \mathrm{d}t$ d'une part et la grandeur rentrant entre t et $t + \mathrm{d}t$ plus la grandeur créée entre t et $t + \mathrm{d}t$ d'autre part.

Application ✍[22]

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r et de t. En effectuant un bilan sur un volume infinitésimal en coordonnées cylindriques, déterminer l'équation locale de conservation de l'énergie en coordonnées cylindriques.

Application ✍[23]

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r et de t. En effectuant un bilan sur un volume infinitésimal en coordonnées sphériques, déterminer l'équation locale de conservation de l'énergie en coordonnées sphériques.

Application ✍[24]

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r et de t. En effectuant un bilan sur un cylindre creux d'épaisseur infinitésimale, déterminer l'équation locale de conservation de l'énergie en coordonnées cylindriques.

Application ✍[25]

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r et de t. En effectuant un bilan sur une coquille creuse d'épaisseur infinitésimale, déterminer l'équation locale de conservation de l'énergie en coordonnées sphériques.

2. Utiliser la conservation du flux de $\vec{\jmath}$

On peut utiliser cette propriété pour déterminer les dépendances de $\vec{\jmath}$ ou pour relier $\vec{\jmath}$ en deux points de l'espace.

1. Trouver un tube de champ allant d'un point à l'autre.
2. Déterminer la section des tubes de champ aux niveaux des deux points.
3. Exprimer les flux de $\vec{\jmath}$ aux niveaux des deux points.
4. Écrire l'égalité entre ces deux flux.

Application ✍[26]

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r. On suppose $\vec{\jmath} = j\vec{e}_r$ à flux conservatif. Relier $\vec{\jmath}(R_1)$ et $\vec{\jmath}(R_2)$.

Application ✍[27]

On se place en coordonnées sphériques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r. On suppose $\vec{\jmath} = j\vec{e}_r$ à flux conservatif. Relier $\vec{\jmath}(R_1)$ et $\vec{\jmath}(R_2)$.

Application ✍[28]

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r. On suppose $\vec{\jmath} = j\vec{e}_r$ à flux conservatif. Montrer que $\vec{\jmath}(r) = \frac{\text{cte}}{r}\vec{e}_r$.

Application ✍[29]

On se place en coordonnées sphériques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r. On suppose $\vec{\jmath} = j\vec{e}_r$ à flux conservatif. Montrer que $\vec{\jmath}(r) = \frac{\text{cte}}{r^2}\vec{e}_r$.

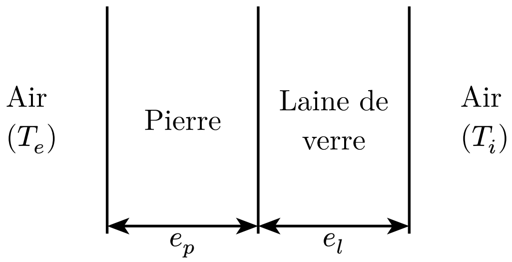
Exercices

1. Conduction thermique dans un mur

On s'intéresse à un mur de surface $S = 30\,\mathrm{m}^2$ qui sépare l'intérieur d'une maison de son extérieur. Le mur est constitué d'une épaisseur $e_p = 30\,\mathrm{cm}$ de pierre de conductivité thermique $\lambda_p = 2.2\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ et d'une épaisseur $e_l = 15\,\mathrm{cm}$ de laine de verre de de conductivité thermique $\lambda_l = 0.03\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

L'intérieur de la maison est à une température $T_i = 20\,°\mathrm{C}$ et l'extérieur à $T_e = 5\,°\mathrm{C}$. Pour un fluide en contact avec un solide, le vecteur densité de courant thermique $\vec{\jmath}$ suit la loi de Newton : $\vec{\jmath} = h(T_s - T_\infty)\vec{e}$ où $\vec{e}$ est un vecteur unitaire dirigé du solide vers le fluide, $h = 10\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$ pour l'air, T_s la température du solide à sa surface et T_∞ la température du fluide loin du solide. Le contact thermique entre la pierre et la laine de verre est parfait.

L'étude s'intéresse au régime stationnaire.



1/ Quelles sont les conditions aux limites vérifiées à chaque interface (par T ou par $\vec{\jmath}$) ?

2/ Calculer la résistance thermique associée à chaque partie du mur (en pierre et en laine de verre).

3/ Montrer que la loi de Newton peut donner lieu à une résistance thermique qu'on précisera.

4/ Tracer le circuit équivalent et calculer la résistance équivalente.

5/ Quelle puissance doit fournir le radiateur de la pièce ?

2. Fil parcouru par un courant électrique

Un fil de rayon R, de longueur infinie, de conductivité thermique λ, de conductivité électrique γ, de capacité thermique massique c, de masse volumique μ est parcouru par un courant électrique constant et uniforme d'intensité I.

On note $\vec{\jmath}_{élec}$ le vecteur densité de courant électrique et $\vec{\jmath}_Q$ le vecteur densité de courant thermique.

On suppose que la température ne dépend que de r et que le potentiel que de z.

On se placera en coordonnées cylindriques et on supposera le régime stationnaire.

1/ Dans quelle direction de déplace les charges ? Même question pour la chaleur.

2/ Établir l'équation de la diffusion thermique en prenant en compte la puissance produite par effet Joule.

3/ Intégrer l'équation de diffusion en régime stationnaire et pour une température extérieure du fil T_0 connue. Tracer $T(r)$.

4/ Intégrer l'équation de diffusion en régime stationnaire et avec comme condition aux limites la loi de Newton : $\vec{j}_Q = h(T(R) - T_{\text{air}})\vec{e}$ où $\vec{e}$ est un vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du fil. Calculer la température de surface du fil et la température maximale atteinte en son sein.

3. Size of marine mammals

Marine mammals are warm-blooded animas whose temperature remain constant. To maintain this temperature, exothermal reactions happen in their cells and produce a volumetric power a. The total power produced by the mammal is P.

To simplify, mammals are described as spheres of radius R, immersed in immobile water of thermal conductivity λ and which temperature is T_∞ far away from the animal.

The problem is supposed to be invariant through a rotation about θ and φ.

1/ Establish the thermal diffusion equation in water (in spherical coordinates).

2/ Ascertain the temperature $T(r)$ around the animal in stationary state.

3/ Determine the thermal power lost by the mammal by integrating $\vec{j}_Q$.

4/ Explain why there is no small aquatic mammal.

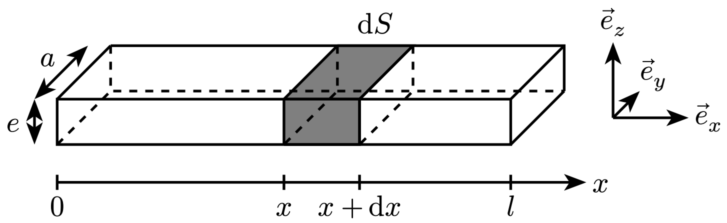
4. Ailette de refroidissement ⋆

La performance des puces électroniques utilisées dans les ordinateurs décroit avec leur température. Afin de dissiper une puissance élevée en limitant la température du composant, on installe un dissipateur de chaleur. Ce dissipateur est muni d'ailettes de refroidissement. On étudie une de ces ailettes.

Une ailette de refroidissement en aluminium de conductivité thermique $\lambda = 205\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ est fixée en $x = 0$ à un corps dont la température $T_0 = 70\,°\mathrm{C}$ est constante est avec lequel le contact thermique est parfait. Elle baigne dans l'air ambiant de température $T_a = 20\,°\mathrm{C}$. L'ailette est en forme de parallélépipède, d'épaisseur $e = 1\,\mathrm{mm}$, de largeur $a = 5\,\mathrm{cm}$ et de longueur $l = 10\,\mathrm{cm}$.

On émet les hypothèses suivantes :

- le régime étudié est stationnaire
- la température d'un point de l'ailette n'est fonction que de x
- $a \gg e$
- la puissance cédée à l'air extérieur par un élément de surface latérale $\mathrm{d}S$ (échanges conducto-convectifs) obéit à la loi de Newton : $\delta P = h(T(x) - T_a)\,\mathrm{d}S$ avec $h = 10\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$.



1/ Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ peut se mettre sous la forme $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{T(x) - T_a}{L^2} = 0$ où on exprimera L en fonction de λ, h et e. Calculer la valeur numérique de L.

2/ Justifier les deux conditions aux limites suivantes : $T(0) = T_0$ et $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x = l) = h(T(l) - T_a)$.

Pour résoudre l'équation différentielle numériquement, on cherche à la mettre sous la forme d'un problème d'Euler $\frac{\mathrm{d}\vec{Y}}{\mathrm{d}x} = \vec{F}\left(x, \vec{Y}\right)$ où $\vec{Y} = \begin{pmatrix} T \\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix}$.

3/ Expliciter la fonction $\vec{F}$.

4/ Compléter le code Python ci-dessous pour définir la fonction $\vec{F}$.

```
from scipy.integrate import solve_bvp, trapezoid
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 100
lam = 200
e = 1e-3
h = 10
a = 5e-2
l = 10e-2
Ta = 20
T0 = 70
L = np.sqrt( lam*e / (h*2) )

def F(x, Y):
    return np.array( [..., ...] )
```

Pour résoudre le problème aux limites, on utilise la fonction `solve_bvp` de la bibliothèque `scipy.integrate`. Cette fonction a besoin des conditions aux limites sous la forme d'une fonction `bc` (pour boundary conditions).

Cette fonction `bc(Y0, Yl)` prend en argument les valeurs de la solution aux deux extrémités du domaine (en $x = 0$ et $x = l$) et doit retourner un tableau contenant les écarts par rapport aux conditions aux limites (lorsque les conditions aux limites sont satisfaites, `bc` doit retourner un tableau de zéros).

5/ Compléter le code Python ci-dessous pour définir la fonction `bc`.

```
def bc(Y0, Yl):
    return np.array( [..., ...] )
```

On peut maintenant résoudre le problème aux limites en utilisant la fonction `solve_bvp`.

6/ Compléter le code Python ci-dessous pour résoudre le problème aux limites.

```
x = ... # array numpy de N points régulièrement espacés entre 0 et l
Y = ... # array numpy de 2 lignes et N colonnes, initialisée à une valeur constante (par exemple T0)

res = solve_bvp(F, bc, x, Y) # résolution numérique du problème
x = res.x # abscisses des points de la solution
T = res.y[0] # températures aux points de la solution
```

7/ Tracer la température $T(x)$ le long de l'ailette.

8/ Justifier que la puissance totale dissipée par l'ailette est donnée par

$$P \approx \int_{x=0}^{L} 2ah(T(x) - T_a)\,\mathrm{d}x$$

Compléter le code Python ci-dessous pour calculer cette puissance. On utilisera la fonction `trapezoid` de la bibliothèque `scipy.integrate` pour effectuer l'intégration numérique. Cette fonction prend en argument un tableau de valeurs de la fonction à intégrer et un tableau des abscisses correspondantes.

```
P = trapezoid(..., x) # calcul de la puissance dissipée
print(P)
```

9/ On aurait pu aussi calculer la puissance dissipée par l'ailette en calculant

$$P = -\lambda a \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x = 0)$$

Expliquer pourquoi, puis compléter le code Python ci-dessous pour calculer cette puissance et vérifier qu'on retrouve le même résultat.

```python
dT = ... # On récupère la dérivée de T en x=0 à partir de la solution numérique
P2 = ... # calcul de la puissance dissipée
print(P2)
```

5. 🤔 Train à sustentation magnétique

Cet exercice est un problème ouvert. Il nécessite de prendre des initiatives et de faire des choix dans la modélisation. Des approximations et des estimations sont souvent nécessaires pour arriver à une solution.

Dans les trains à sustentation magnétique, le train lévite au-dessus des rails grâce à des forces magnétiques générées par des bobines supraconductrices placées dans le train. Pour que le train puisse léviter, le champ magnétique produit doit dépasser 4 T.

Expliquer pourquoi il n'est pas possible d'utiliser des bobines constituées de fils résistifs pour générer ce champ magnétique.

Données sur le solénoïde

- Diamètre : 0.2 m
- Longueur : 0.5 m
- Nombre de spires : 10 000
- Diamètre du fil : 2.0 mm

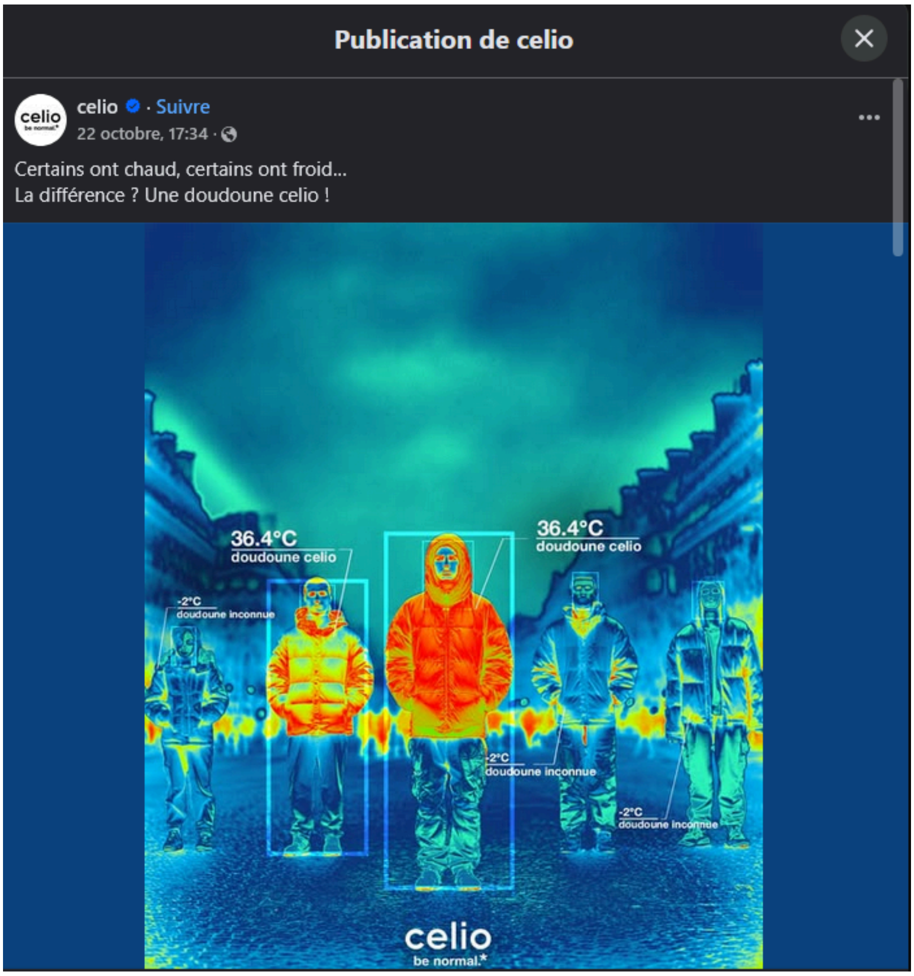
Données sur le cuivre

- Masse volumique : $8.96\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$
- Capacité thermique massique : $385\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K}$
- Résistivité électrique : $1.68 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$
- Température de fusion : 1 357 K

6. 💬 J'explique à mon cousin : Publicité Celio

Le but de cet exercice est de vous faire expliquer un concept/phénomène avec des mots simples et courants (pas de vocabulaire technique ou scientifique) à une personne de votre entourage. Tachez de faire simple et court, utilisez des analogies avec des choses connues. Vous pouvez vous inspirer de Ma thèse en 180 secondes. Profitez-en pour prendre des nouvelles !

En hivers 2024, la marque de vêtements Celio a diffusé la publicité ci-dessous sur les réseaux sociaux.



Expliquer pourquoi cette publicité est loin de mettre en avant les qualités thermiques des vêtements Celio.