Phénomènes de transport 4
Fluide en écoulement

Compétences

- ❏ Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.
- ❏ Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique.
- ❏ Définir une ligne de courant, un tube de courant.
- ❏ Associer la dérivée particulaire du vecteur vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point.
- ❏ Citer et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$.
- ❏ Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
- ❏ Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu\vec{v}$ à travers une surface orientée.
- ❏ Énoncer l'équation locale traduisant la conservation de la masse.
- ❏ Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.
- ❏ Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de $\vec{v}$ à travers une surface orientée.
- ❏ Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme et relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé.
- ❏ Exploiter la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.
- ❏ Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface.
- ❏ Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression $-\overrightarrow{grad}\,P$.
- ❏ Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
- ❏ Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle.
- ❏ Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau.
- ❏ Exploiter la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.
- ❏ Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent).
- ❏ Relier le débit volumique à la vitesse débitante.
- ❏ Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion.
- ❏ Interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection.
- ❏ Évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
- ❏ Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique.
- ❏ Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque.
- ❏ Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.
- ❏ Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique.
- ❏ Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, décrire qualitativement la notion de couche limite.
- ❏ Définir et orienter les forces de portance et de traînée.
- ❏ Exploiter les graphes de C_x et C_z en fonction de l'angle d'incidence.

Questions de cours des interrogations orales

- ❏ Dans le cas unidimensionnel, déterminer la dérivée particulaire d'une fonction scalaire. Généraliser à 3D.
- ❏ Établir l'équation locale de conservation de la masse.
- ❏ Exprimer la résultante volumique des forces de pression dans le cas unidimensionnel. Généraliser à 3D.

- ❏ Établir l'équation fondamentale de l'hydrostatique. Établir le champ de pression dans un fluide homogène et incompressible au repos.
- ❏ Établir l'équation fondamentale de l'hydrostatique. Établir le champ de pression dans l'atmosphère en la supposant isotherme etn assimilant l'air à un gaz parfait.
- ❏ Établir la loi de Hagen–Poiseuille.

Entrainements

❏ 25.1 ❏ 25.2 ❏ 25.3 ❏ 25.4 ❏ 25.5 ❏ 25.6 ❏ 25.7 ❏ 25.8 ❏ 25.9 ❏ 25.10
❏ 25.11 ❏ 25.12 ❏ 25.13 ❏ 25.14 ❏ 25.15 ❏ 25.16 ❏ 26.1 ❏ 26.2 ❏ 26.3 ❏ 26.4
❏ 26.5 ❏ 26.6 ❏ 26.7 ❏ 26.8 ❏ 26.9 ❏ 26.10 ❏ 26.11 ❏ 26.12 ❏ 26.13 ❏ 26.14

Exercices

❏ Exercice 1 ❏ Exercice 2 ❏ Exercice 3 ❏ Exercice 4 ❏ Exercice 5 ❏ Exercice 6
❏ Exercice 7 ❏ Exercice 8 ❏ Exercice 9 ❏ Exercice 10

Devoirs maison

❏ DM 1

Résumé du cours

1. Description de l'écoulement d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel parfaitement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides.

1.1. Notion de particule de fluide

À l'échelle microscopique, les particules qui composent un fluide sont animés de mouvements erratiques[1].

Il y a deux façons de définir un système mésoscopique :

- On peut définir un volume mésoscopique immobile, comme on l'a fait dans le chapitre diffusion de particules. Un tel volume peut contenir un nombre de particules variable au cours du temps.
- On peut définir un volume mésoscopique qui contient toujours le même nombre de particules (en moyenne) et qui se déplace avec le fluide[2]. Ce système est appelé **particule de fluide**. Une particule de fluide est un système fermé.

La masse d'une particule de fluide est donc constante.

1.2. Description eulérienne et champ de vitesse

La description eulérienne consiste à décrire le champ de vitesse, c'est-à-dire la vitesse du fluide à chaque endroit de l'espace : $\vec{v}(M,t)$

La vitesse en un même point et à des instants différents $\vec{v}(M,t_1)$ et $\vec{v}(M,t_2)$ est la vitesse de particules de fluide différentes.

1.3. Tube de courant

Une ligne de courant est une courbe en tout point tangente au vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ et orientée dans le même sens.

Schéma : Ligne de courant

En régime stationnaire, les lignes de courant sont immobiles. En régime stationnaire, les lignes de courant sont les trajectoires des particules de fluide.

Attention : de manière générale, les lignes de courant ne sont pas forcément les trajectoires des particules de fluide.

1.4. Dérivée particulaire

Dérivée particulaire ♥ ✍1

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\right) f$$

Avec
- $\frac{\partial}{\partial t}$ le terme local
- $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}$ le terme convectif
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)

[1]Erratique signifie aléatoire, qui vont dans tous les sens.
[2]Plus précisément, dont la vitesse est la vitesse moyenne des particules qui la composent.

1.5. Débit massique

Masses volumique à connaître ♥

Hypothèse : Dans les conditions normales de température et de pression

- $\mu_{\text{eau}} = 1 \cdot 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$
- $\mu_{\text{air}} = 1\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$

Avec
- μ la masse volumique ($\text{kg}\,\text{m}^{-3}$)

Vecteur densité de courant de masse ♥ ✍[2]

$$\vec{\jmath}_m = \mu\vec{v}$$

Avec
- $\vec{\jmath}_m$ le vecteur densité de courant de masse ($\text{kg}\,\text{m}^{-2}\,\text{s}^{-1}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\text{m}\,\text{s}^{-1}$)
- μ la masse volumique ($\text{kg}\,\text{m}^{-3}$)

Débit massique ♥ ✍[3]

$$D_m = \iint_S \mu\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{d}S}$$

Avec
- D_m le débit massique ($\text{kg}\,\text{s}^{-1}$)
- μ la masse volumique ($\text{kg}\,\text{m}^{-3}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\text{m}\,\text{s}^{-1}$)

Application ✍[4]

Le débit maximal de l'Odet a été mesuré le 13 décembre 2000. La vitesse (supposée uniforme) valait $4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Sa largeur est de $10\,\text{m}$ et sa profondeur $4\,\text{m}$. Déterminer le débit massique.

1.6. Débit volumique

Vecteur densité de courant de volume ♥ ✍[5]

$$\vec{\jmath}_V = \vec{v}$$

Avec
- $\vec{\jmath}_V$ le vecteur densité de courant de volume ($\text{m}\,\text{s}^{-1}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\text{m}\,\text{s}^{-1}$)

Débit volumique ♥ ✍[6]

$$D_V = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{d}S}$$

Avec
- D_V le débit volumique ($\text{m}^3\,\text{s}^{-1}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\text{m}\,\text{s}^{-1}$)

Application ✍[7]

Le débit maximal de l'Odet a été mesuré le 13 décembre 2000. La vitesse (supposée uniforme) valait $4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Sa largeur est de $10\,\text{m}$ et sa profondeur $4\,\text{m}$. Déterminer le débit volumique.

1.7. Conservation de la masse

La masse est une grandeur physique conservative.

Équation locale de conservation de la masse ♥ ✍[8]

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\text{div}\,(\mu\vec{v})$$

Avec
- μ la masse volumique ($\text{kg}\,\text{m}^{-3}$)

Conservation du débit massique ♥ ✍[9]

Hypothèse : Le régime est stationnaire

Le débit massique est le même sur chaque section d'un tube de courant.

Avec
- D_m le débit massique ($\mathrm{kg\,s^{-1}}$)
- μ la masse volumique ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)

1.8. Écoulement incompressible et homogène

Le volume n'est pas nécessairement une grandeur conservative.

Exemple

Si on compresse une seringue contenant un gaz, son volume diminue.

Dans un écoulement incompressible, le volume des particules de fluides ne change pas au cours du temps.

Dans un écoulement homogène, toutes les particules de fluide ont la même masse volumique.

Dans un écoulement incompressible et homogène, la masse volumique μ est uniforme[3] et stationnaire[4].

Conservation du volume ♥

Hypothèses :
- *L'écoulement est incompressible*
- *L'écoulement est homogène*

Le volume se conserve.

Conservation du débit volumique ♥ ✍[10]

Hypothèses :
- *L'écoulement est incompressible*
- *L'écoulement est homogène*

Le débit volumique est le même sur chaque section d'un tube de courant.

2. Actions de contact sur un fluide

2.1. Action normale et tangentielle

Les forces de contact s'exerçant sur la surface d'une particule de fluide sont proportionnelles à sa surface. Elles peuvent se décompose en
- une composante orthogonale à la surface (normale) appelée force de pression
- une composante tangentielle à la surface appelée force de viscosité

2.2. Forces de pression

Forces de pression ♥

$$\overrightarrow{\delta^2 F_P} = P\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Avec
- $\delta^2 F_P$ la force de pression s'exerçant sur une surface élémentaire (N)
- P la pression (Pa)

[3]Uniforme signifie qui ne dépend pas de la position : c'est le même partout.
[4]Stationnaire signifie qui ne dépend pas du temps : c'est le même tout le temps.

Résultante volumique des forces de pression ♥ ✍11

$$\overrightarrow{\delta^3 F_P} = -\overrightarrow{grad}\, P \,\mathrm{d}V$$

Avec
- $\delta^3 F_P$ la force de pression s'exerçant sur un volume élémentaire (N)
- P la pression (Pa)

Relation fondamentale de l'hydrostatique ♥ ✍12

Hypothèses :
- *Le fluide est au repos.*
- *Les seules forces sont les forces de pression et le poids.*

$$\overrightarrow{grad}\, P = \mu \vec{g}$$

Avec
- P la pression (Pa)
- μ la masse volumique ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
- g l'accélération de la pesanteur ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)

Application ✍13

Déterminer le champ de pression dans l'océan en le supposant homogène, incompressible et au repos.

Application ✍14

Déterminer le champ de pression dans l'atmosphère la supposant immobile et isotherme et en assimilant l'air à un gaz parfait.

2.3. Forces tangentielles

La force tangentielle est due à la viscosité du fluide.

Schéma : Forces de viscosité sur une surface élémentaire

Forces de viscosité

Hypothèses :
- *Le fluide est newtonien.*
- *Le champ de vitesse est $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$.*
- *La surface sur laquelle s'exerce la force est orientée selon $\vec{e}_y$.*

$$\overrightarrow{\delta^2 F_v} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \,\mathrm{d}S \vec{e}_x$$

Avec
- $\delta^2 F_v$ la force de viscosité s'exerçant sur une surface élémentaire (N)
- η la viscosité dynamique ($\mathrm{Pl} = \mathrm{Pa\,s}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)

Cette formule doit être adaptée en fonction des axes du problème.

Application ✍15

Vérifier l'homogénéité de cette relation.

Viscosité de l'eau ♥

Hypothèse : À 20 °C

$$\eta_{\text{eau}} = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{Pl}$$

Avec
- η la viscosité dynamique (Pl = Pa s)

Résultante volumique des forces de viscosité ♥ ✍16

Hypothèse : Le fluide est newtonien.

$$\overrightarrow{\delta^3 F_v} = \eta \vec{\Delta}\vec{v}\,\mathrm{d}V$$

Avec
- $\delta^3 F_v$ la résultante de viscosité s'exerçant sur un volume élémentaire (N)
- η la viscosité dynamique (Pl = Pa s)
- v le champ de vitesse du fluide (m s^{-1})

Comme la force ne peut pas diverger, le champ de vitesse est dérivable donc continu.

En particulier, la vitesse d'un fluide au voisinage immédiat d'un solide est la vitesse du solide. Cette condition est appelée condition d'adhérence fluide-solide.

Application ✍17

Appliquer la loi de la quantité de mouvement sur une particule de fluide soumise aux forces de pression, de viscosité (fluide newtonien) et au poids. Cette équation (simplifiée par dV) est appelée équation de Navier-Stockes.

Application ✍18

Écoulement de Couette-plan : un fluide est en écoulement stationnaire entre deux plaques parallèles, l'une immobile (en $z = 0$) et l'autre animée d'une vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$ (en $z = a$). On néglige les effets de la gravité et on suppose la pression uniforme. Déterminer le champ de vitesse dans le fluide. On supposera que la vitesse ne dépend que de z et qu'elle est selon x : $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$.

3. Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique

On s'intéresse à un écoulement à l'intérieur d'une conduite cylindrique.

Exemple

Eau dans le réseau d'eau potable.

3.1. Vitesse débitante

La vitesse débitante est la vitesse qu'aurait le fluide si le champ de vitesse était uniforme tout en conservant le même débit volumique.

Vitesse débitante ♥

$$U = \frac{D_V}{S}$$

Avec
- U la vitesse débitante (m s^{-1})
- D_V le débit volumique (m^3 s^{-1})
- S la section de la conduite (m^2)

La vitesse débitante peut être vue comme la moyenne de la vitesse sur une section de la conduite :

$$U = \frac{\iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}}{S}$$

3.2. Régimes d'écoulement

https://youtu.be/eD7LdS6bfOQ

Reynolds a mis en évidence expérimentalement deux régimes d'écoulement.

Schéma : Expérience de Reynolds

En fonction du débit, on peut observer

le régiment laminaire dans lequel les lignes de courant sont stationnaires, pour des vitesses débitantes faibles

le régime turbulent dans lequel les lignes de courant se déforment, pour des vitesses débitantes importantes.

Les deux régimes d'écoulement diffèrent par le mode de transport de quantité de mouvement prépondérant.

3.3. Transport de quantité de mouvement par diffusion

Dans le régime laminaire, la quantité de mouvement est essentiellement transportée par diffusion.

Vecteur densité de courant de quantité de mouvement diffusé ✍[19]

Hypothèse : Le fluide est newtonien.

$$\vec{\jmath}_{p,diff} = -\nu \overrightarrow{grad}\,(\mu v)$$

Avec
- $\vec{\jmath}_{p,diff}$ le vecteur densité de courant de quantité de mouvement diffusée ($\mathrm{kg\,m\,s^{-1}\,m^{-2}\,s^{-1}}$)
- $\nu = \frac{\eta}{\mu}$ la viscosité cinématique ($\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)
- μ la masse volumique ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)

Temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement ♥ ✍[20]

$$\tau_{\mathrm{dif}} \sim \frac{L^2}{\nu}$$

Avec
- τ_{dif} la durée caractéristique associée à la diffusion (s)
- L une longueur caractéristique du problème (m)
- $\nu = \frac{\eta}{\mu}$ la viscosité cinématique ($\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)

3.4. Transport de quantité de mouvement par convection

Dans le régime turbulent, la quantité de mouvement est essentiellement transportée par convection.

Vecteur densité de courant de quantité de mouvement ✍[21]

$$\vec{\jmath}_{p,conv} = \mu v \vec{v}$$

Avec
- $\vec{\jmath}_{p,conv}$ le vecteur densité de courant de quantité de mouvement convectée ($\mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,m^{-2}\,s^{-1}}$)
- μ la masse volumique ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)

Temps caractéristique de convection de quantité de mouvement ♥ ✍[22]

$$\tau_{\text{conv}} \sim \frac{L}{\mathscr{V}}$$

Avec
- τ_{conv} la durée caractéristique associée à la convection (s)
- L une longueur caractéristique du problème (m)
- $\mathscr{V}$ un ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)

3.5. Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est une grandeur adimensionnée qui sert à comparer l'importance relative du transport de quantité de mouvement par convection et par diffusion.

Nombre de Reynolds ♥

Hypothèse : le fluide est newtonien

$$R_e = \frac{\mathscr{V} L}{\nu}$$

Avec
- R_e le nombre de Reynolds (sans unité)
- L une longueur caractéristique du problème (m)
- $\mathscr{V}$ un ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
- $\nu = \frac{\eta}{\mu}$ la viscosité cinématique ($\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)

Dans le cas d'un écoulement interne, L désigne le **diamètre** de la conduite.

Dans le cadre d'un écoulement interne à une conduite cylindrique, la longueur caractéristique d est le diamètre de la conduite et l'ordre de grandeur de la vitesse est la vitesse débitante.

Application ✍[23]

De l'eau à 20 °C circule dans une conduite de diamètre 5 cm et de longueur 30 m à la vitesse débitante de $0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calculer le nombre de Reynolds.

Diffusion vs convection ✍[24]

Hypothèse : le fluide est newtonien

$$R_e \sim \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}} \sim \frac{\left\|\vec{\jmath}_{p,conv}\right\|}{\left\|\vec{\jmath}_{p,conv}\right\|}$$

Avec
- R_e le nombre de Reynolds (sans unité)
- τ_{diff} la durée caractéristique associée à la diffusion (s)
- τ_{conv} la durée caractéristique associée à la convection (s)

Expérimentalement, on peut établir le seuil de passage d'un régime laminaire à un régime turbulent.

Seuil de turbulence ♥

Hypothèses :
- *Le fluide est newtonien*
- *L'écoulement est interne à une conduite*

- Si $R_e < 2000$ l'écoulement est laminaire
- Si $R_e > 2000$ l'écoulement est turbulent

Avec
- R_e le nombre de Reynolds (sans unité)

Application ✍[25]

De l'eau à 20 °C circule dans une conduite de diamètre 5 cm et de longueur 30 m à la vitesse débitante de $0.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

3.6. Chute de pression dans une conduite horizontale à faible nombre de Reynolds

Dans un écoulement interne laminaire, la chute de pression entre les deux extrémités d'une conduite cylindrique est donnée par la loi de Hagen–Poiseuille.

Loi de Hagen–Poiseuille ♥ ✍[26]

Hypothèses :
- *Le fluide est newtonien.*
- *La conduite est horizontale.*
- *L'effet de la gravité est négligé.*
- *L'écoulement est laminaire.*
- *Le régime est stationnaire.*
- *Le champ de pression ne dépend que de x.*
- *Les effets de bord sont négligés.*

$$D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta P$$

Avec
- D_V le débit volumique ($\mathrm{m^3\,s^{-1}}$)
- R le rayon de la conduite (m)
- η la viscosité dynamique (Pl = Pa s)
- l la longueur de la conduite (m)
- ΔP la différence de pression entre les extrémités de la conduite (Pa)

Par analogie avec l'électrocinétique, on peut définir la résistance hydraulique.

Résistance hydraulique ♥ ✍[27]

Hypothèses :
- *Le fluide est newtonien.*
- *La conduite est horizontale.*
- *L'effet de la gravité est négligé.*
- *L'écoulement est laminaire.*

$$\Delta P = R_H D_V$$

avec

$$R_H = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$$

Avec
- ΔP la différence de pression entre les extrémités de la conduite (Pa)
- R_H la résistance hydraulique ($\mathrm{Pa\,s\,m^{-3}}$)
- D_V le débit volumique ($\mathrm{m^3\,s^{-1}}$)
- η la viscosité dynamique (Pl = Pa s)
- l la longueur de la conduite (m)
- R le rayon de la conduite (m)

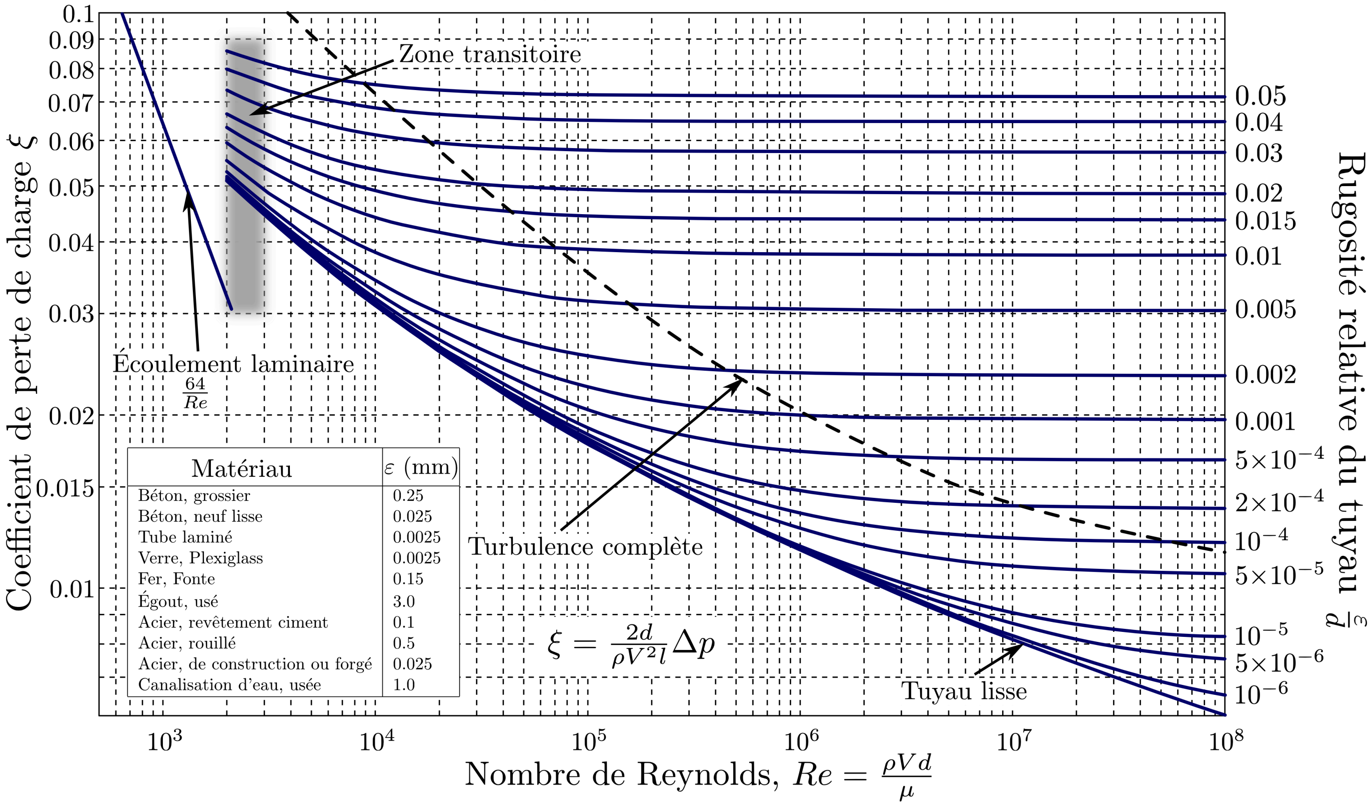
Application ✍[28]

De l'eau à 20 °C circule dans une conduite de diamètre 5 cm et de longueur 30 m à la vitesse débitante de $0.01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Quelle est la chute de pression entre les deux extrémités de la conduite ?

3.7. Chute de pression pour un écoulement quelconque

Lorsque l'écoulement n'est pas laminaire, la loi de Hagen-Poiseuille n'est plus vraie. Il est alors nécessaire de s'en remettre aux données expérimentales qui sont résumées sur un diagramme appelé diagramme de Moody.

Diagramme de Moody



Matériau	ε (mm)
Béton, grossier	0.25
Béton, neuf lisse	0.025
Tube laminé	0.0025
Verre, Plexiglass	0.0025
Fer, Fonte	0.15
Égout, usé	3.0
Acier, revêtement ciment	0.1
Acier, rouillé	0.5
Acier, de construction ou forgé	0.025
Canalisation d'eau, usée	1.0

Application ✍[29]

De l'eau à $20\,°\mathrm{C}$ circule dans une conduite en fonte de diamètre $1.5\,\mathrm{cm}$ et de longueur $3\,\mathrm{m}$ à la vitesse débitante de $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Quelle est la chute de pression entre les deux extrémités de la conduite ?

4. Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle

4.1. Force et coefficient de trainée

Lorsqu'un objet est en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide, il subit des forces de pression et de viscosité. La résultante de ces forces, exceptée la poussée d'Archimède, dans la direction du mouvement est appelée trainée.

Le maitre-couple (ou surface apparente) est la surface projetée dans une certaine direction.

Schéma : Maître couple

Application ✍30

Calculer le maitre couple dans la direction du mouvement pour la voiture ci-dessous. On pourra approximer la voiture à un parallélépipède rectangle pour faire les calculs.

Force de traînée ♥ ✍31

Hypothèses :

- *Le fluide est newtonien.*
- *L'écoulement est stationnaire.*
- *L'objet est en mouvement rectiligne uniforme.*

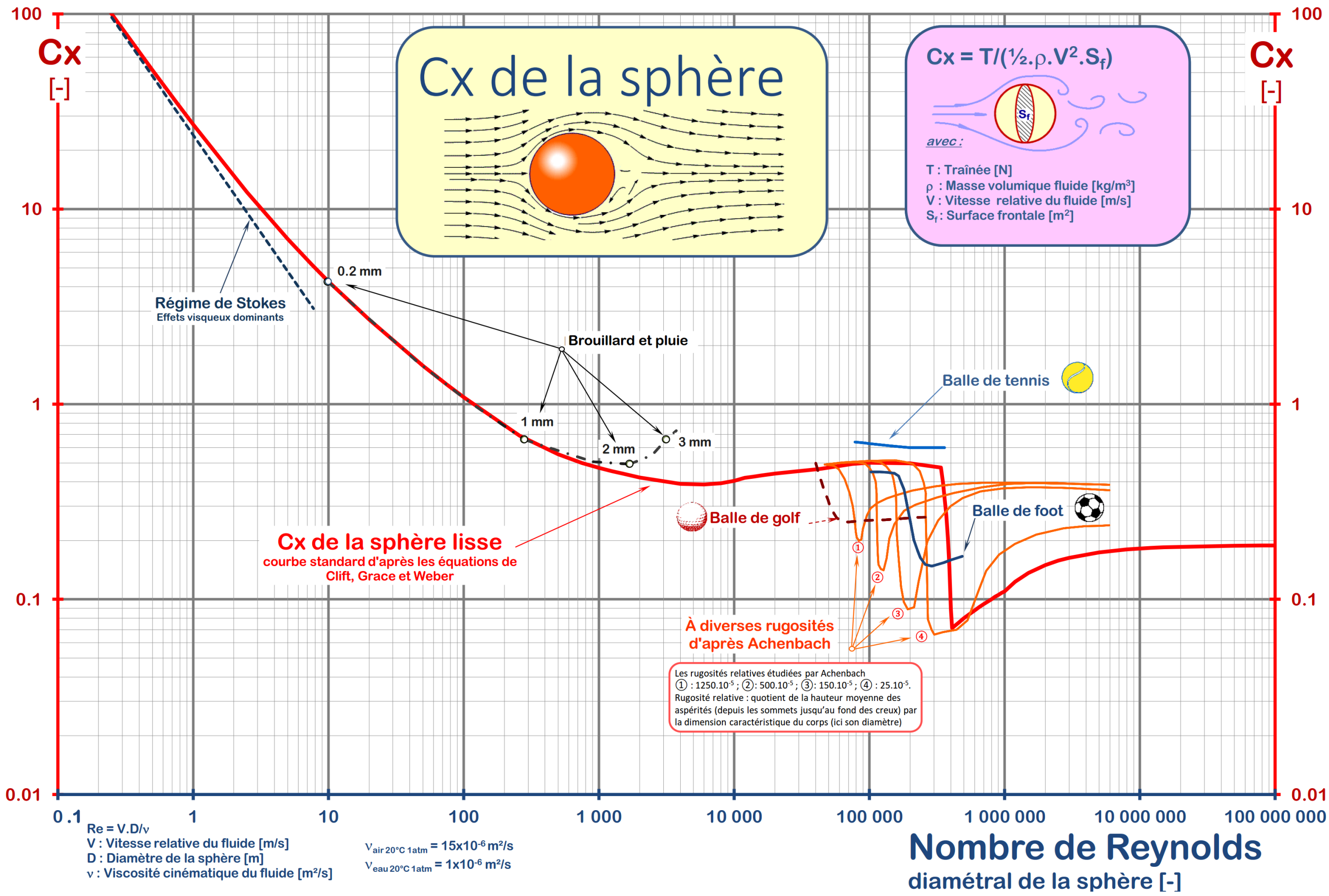
$$\vec{F}_x = -\frac{1}{2}\mu v^2 S_x C_x \vec{u}$$

Avec

- F_x la force de traînée (N)
- μ la masse volumique ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
- S_x le maître-couple selon x ($\mathrm{m^2}$)
- C_x le coefficient de traînée (sans unité)

Le coefficient de trainée dépend de la forme de l'objet et du nombre de Reynolds.

4.2. Cas d'une sphère



Le coefficient de trainée de la sphère est tracé en fonction du nombre de Reynolds dans la courbe en annexe. On peut y voir plusieurs parties.

4.2.1. Faible Reynolds

Pour $R_e < 1$, le graphe s'approche d'une droite (en échelle logarithmique) d'équation $C_x = \frac{24}{R_e}$.

Force de trainée linéaire ♥ ✍[32]

Hypothèses :

- *Le fluide est newtonien.*
- $R_e < 1$

$$\vec{F}_x = -\alpha\vec{v}$$

Avec

- F_x la force de traînée (N)
- α le coefficient de frottement ($\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)

4.2.2. Haut Reynolds

Pour $R_e \in [2\,000, 200\,000]$, C_x est constant.

Force de trainée quadratique ♥ ✍[33]

Hypothèses :

- *Le fluide est newtonien*
- $R_e \in [2\,000, 200\,000]$

$$\vec{F}_x = -\beta v^2\vec{u}$$

Avec

- F_x la force de traînée (N)
- β le coefficient de frottement ($\mathrm{N\,s^2\,m^{-2}}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)

4.3. Forces de trainée et de portance sur une aile d'avion

Sur certains objets, la force de trainée s'accompagne d'une force de portance.

Force de portance ♥

$$\vec{F}_z = \frac{1}{2}\mu v^2 S_z C_z \vec{u}$$

Avec

- F_z la force de portance (N)
- μ la masse volumique ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)
- v le champ de vitesse du fluide ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
- S_z le maitre couple selon z ($\mathrm{m^2}$)
- C_z le coefficient de portance (sans unité)

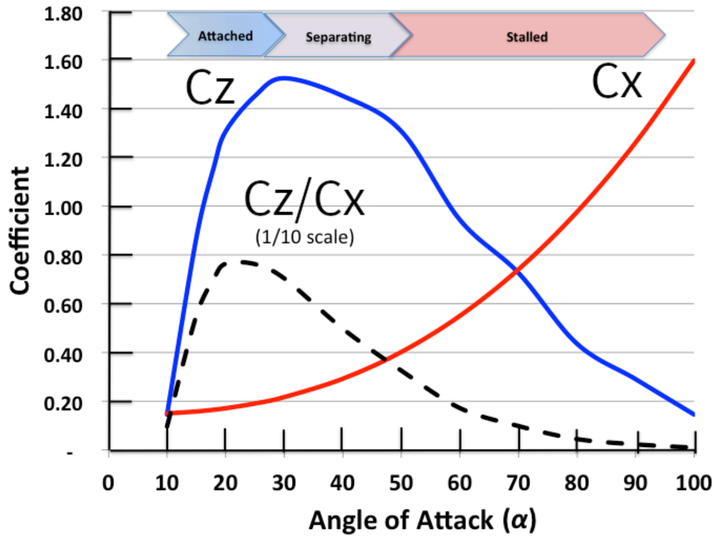
Exemple

Aile d'avion, voile de bateau.

La force de trainée est colinéaire à la vitesse de l'objet. La force de portance est orthogonale à la vitesse de l'objet.

Schéma : Traînée, portance et angle d'incidence

La trainée et la portance dépendent de l'angle d'incidence. Les courbes ci-dessous présentent un exemple de dépendance pour une aile d'avion.



4.4. Couche limite

Dans un écoulement à haut nombre de Reynolds, où le transport de quantité de mouvement se fait essentiellement par convection, la viscosité du fluide a une influence sur la force subie par un objet. Pour expliquer cet apparent paradoxe, on introduit la couche limite.

Dans un écoulement à haut nombre de Reynolds, il existe des zones où le transport de quantité de mouvement se fait essentiellement par diffusion. Ces zones sont appelées couches limites. Ces zones sont de faible épaisseur et situées à proximité immédiate des objets.

Schéma : Couche limite

Méthodes

1. Appliquer le théorème de la résultante cinétique à une particule de fluide

1. Faire le bilan des forces
   - Forces de pression (résultante $-\overrightarrow{grad}\,P\,\mathrm{d}V$)
   - Forces de viscosité (résultante $\eta\Delta\vec{v}$ pour un fluide newtonien)
   - D'autres forces éventuelles (poids, …)
2. Écrire le TRC à la particule de fluide (attention, l'accélération comporte 2 termes : le terme local et le terme convectif)

2. Lire un diagramme de Moody

1. (seulement si $R_e > 2000$) Déterminer sur quelles courbes on va se placer grâce à la rugosité.
2. Passer des grandeurs de l'énoncé aux grandeurs adimensionnées.
3. Lire sur la courbe.
4. Passer des grandeurs adimensionnées lues sur la courbes aux grandeurs demandées.

Exercices

1. Troposphère

La troposphère est la partie inférieure de l'atmosphère, située sous 11 km d'altitude. On note (Oz) l'axe vertical ascendant, dont l'origine est au niveau de la mer.

On suppose dans un premier temps que la température est uniforme dans la troposphère.

1/ Déterminer l'expression de la pression P en fonction de l'altitude z, en fonction de la température T, de la masse molaire de l'air M_{air}, de la constante des gaz parfaits R et de l'accélération de la pesanteur g. On note P_0 la pression au niveau de la mer.

2/ Montrer que 70 % de la masse totale de l'air se situe en dessous de 10 km dans ce modèle.

On renonce à l'hypothèse isotherme pour passer à une atmosphère adiabatique.

3/ Les capacités thermiques molaires de l'air sont $C_V = \frac{5}{2}R$ et $C_P = \frac{7}{2}R$. Exprimer la valeur du coefficient γ.

4/ Montrer que le produit $T^x P^y$ est constant pour une transformation réversible et adiabatique d'un gaz parfait. Exprimer x et y en fonction de γ.

5/ En déduire la relation reliant $\frac{\mathrm{d}P}{P}$ et $\frac{\mathrm{d}T}{T}$.

6/ Établir l'expression du gradient de température adiabatique $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$ en fonction de γ, M, g et R.

7/ Quelle température fait-il en haut de la troposphère dans ce modèle adiabatique ?

2. Lubrification

Le but de cet exercice est de comprendre l'intérêt de la lubrification. On considère un mobile parallélépipédique de masse $M = 30$ kg en translation sur un support horizontal.

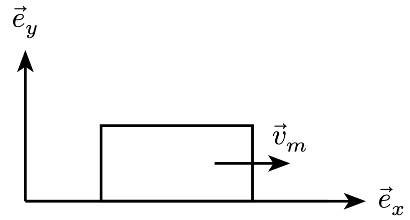


Fig. 5. – Mobile en frottement solide avec son support.

Dans un premier temps, on étudie le contact sec entre le pavé et la surface. La force de frottement est de type frottement solide. Il obéit à la loi de Coulomb : $R_T = fR_N$ avec un coefficient $f = 0.20$. En $x = 0$, $v = v_0 = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

1/ Calculer la valeur numérique de la réaction tangentielle.

2/ Calculer la distance d'arrêt du mobile et faire l'application numérique.

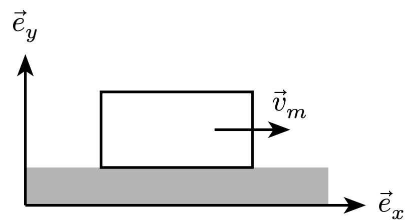


Fig. 6. – Mobile sur une couche de fluide.

On introduit maintenant une couche d'huile d'épaisseur $e = 1.0$ mm entre la mobile et la surface. On suppose que le régime est permanent (un opérateur maintient la vitesse du palet constante) et que la vitesse du fluide s'écrit $\vec{v} = v(x, y)\vec{e}_x$. On néglige les effets de bords. La surface du mobile en contact avec l'huile est $S = 400\,\mathrm{cm}^2$. Le mobile a une vitesse $v_m = v_0 = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

La densité de l'huile est 0.9 et sa viscosité cinématique est $60 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$.

3/ Calculer la viscosité dynamique de l'huile.

4/ Montrer que $v(x, y)$ est indépendant de x.

5/ On admet que la vitesse s'écrit $v(y) = ay + b$. Déterminer a et b en exploitant la description du problème.

6/ Donner l'expression de la force surfacique de cisaillement au sein de l'eau.

7/ Exprimer la force de frottement à laquelle est soumis la pavé.

8/ On admet qu'en l'absence d'action de l'opérateur pour maintenir la vitesse constante, l'expression de la vitesse établie précédemment reste valable, mais avec a fonction du temps. Que devient la distance d'arrêt du palet ?

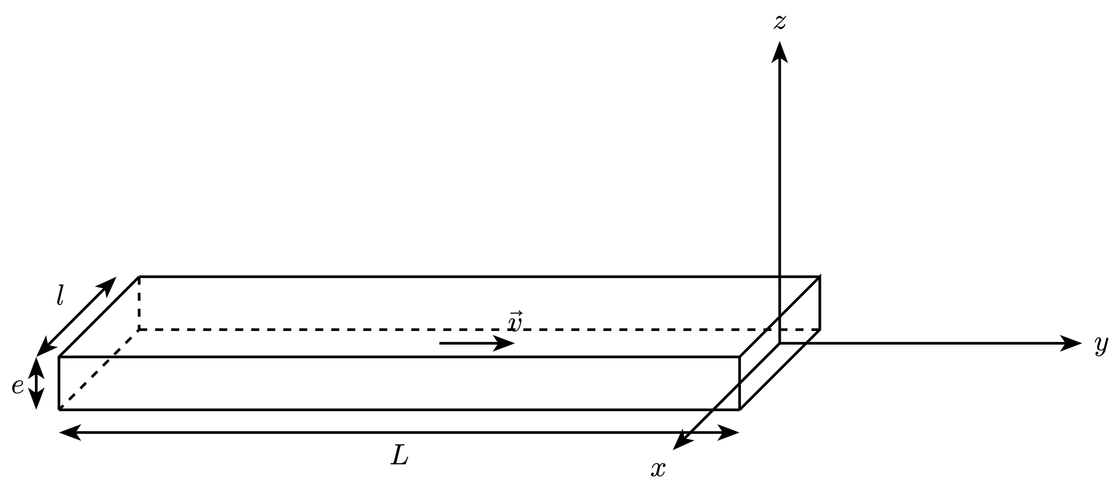
3. Conduite plate

On s'intéresse à une conduite plate d'épaisseur e, de largeur $l \gg e$ et de longueur L dans laquelle circule un fluide incompressible et homogène de viscosité dynamique η et de masse volumique μ.

Le champ de vitesse est noté $\vec{v} = v\vec{e}_y$

La conduite est délimitée par les plans d'équation $x = \frac{l}{2}$, $x = -\frac{l}{2}$, $z = \frac{e}{2}$ et $z = -\frac{e}{2}$.

Les effets de la gravité sont négligés et on suppose que le gradient de pression est uniforme et selon $\vec{e}_y$



1/ Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ de vitesse dans la conduite.

2/ Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par le champ de vitesse ?

3/ On suppose l'écoulement laminaire et en régime stationnaire. Les effets de bord sont négligés. Justifier que $\vec{v} = v(z)\vec{e}_y$

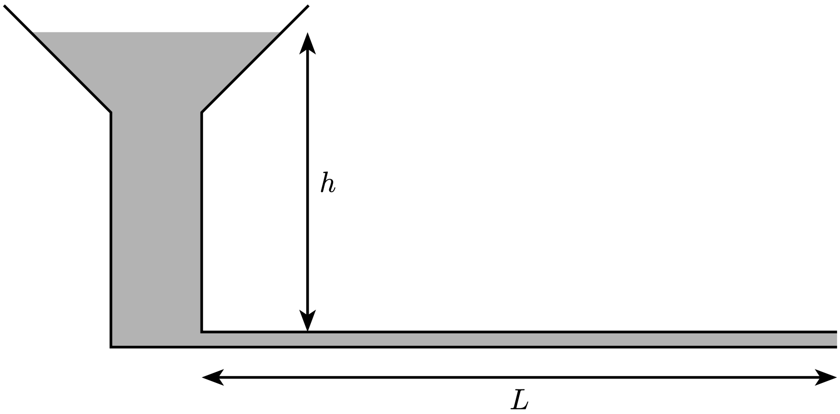
4/ Établir le profil de vitesse dans la conduite.

5/ Exprimer le débit volumique dans la conduite en fonction de l, e, η et $\frac{\partial P}{\partial y}$.

6/ Calculer la résistance hydraulique de cette conduite plate pour $e = 1\,\mathrm{mm}$, $L = 2\,\mathrm{m}$ et $l = 2\,\mathrm{cm}$ et dans laquelle circule de l'eau à $20\,°\mathrm{C}$.

4. Distribution d'eau potable

Un château d'eau de hauteur $h = 25\,\mathrm{m}$, alimente un village en eau potable. On suppose l'écoulement incompressible et homogène.



1/ Quelle pression P_e qui peut être attendue au pied du château d'eau, en admettant que le débit de l'eau dans la canalisation soit suffisamment faible pour ne pas impacter la pression ?

2/ Soit une conduite de longueur $L = 100\,\mathrm{m}$ et de section $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ partant du pied de ce château d'eau. L'autre extrémité est à l'air libre. Quel débit peut-on attendre, en supposant *a priori* l'écoulement laminaire ? Calculer la vitesse débitante U.

3/ Calculer le nombre de Reynolds pour cet écoulement. La modélisation précédente est-elle correcte ?

4/ En utilisant le diagramme de Moody, dire si la vitesse débitante sera plus ou moins importante que celle calculée plus haut.

5. 💬 J'explique à ma tante : Analogie hydraulique

Le but de cet exercice est de vous faire expliquer un concept/phénomène avec des mots simples et courants (pas de vocabulaire technique ou scientifique) à une personne de votre entourage. Tachez de faire simple et court, utilisez des analogies avec des choses connues. Vous pouvez vous inspirer de Ma thèse en 180 secondes. Profitez-en pour prendre des nouvelles !

On introduit souvent l'électricité en continu en faisant une analogie avec l'hydraulique.

Expliquer, en procédant par analogie avec l'hydraulique, les bases de l'électricité: qu'est-ce qu'une tension, un courant, une résistance.

6. 🤔 Poteau d'incendie ★★

Cet exercice est un problème ouvert. Il nécessite de prendre des initiatives et de faire des choix dans la modélisation. Des approximations et des estimations sont souvent nécessaires pour arriver à une solution.

Les poteaux d'incendie doivent pouvoir délivrer un débit de $30\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{h}^{-1}$ minimum sous une pression dynamique de $1\,\mathrm{bar}$ minimum.

Un chateau d'eau de 20 m de haut alimente un village en eau par une conduite en fonte de diamètre intérieur 200 mm et de longueur 3 km puis par une conduite en fonte de diamètre intérieur 150 mm et de longueur 2 km.

On pourra utiliser le diagramme de Moody du cours.

Les poteaux d'incendie sont-ils aux normes ou est-il nécessaire d'installer des bassins de stockage supplémentaires dans le village ?

7. Chute d'une bille dans un fluide très visqueux

On s'intéresse à une bille d'acier sphérique de rayon R, de masse m, de masse volumique $\rho_{\text{acier}} = 7\,850\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$, de vitesse $\vec{v} = -v\vec{e}_z$ lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette remplie de glycérine (de masse volumique $\rho_{\text{glycérine}} = 1\,260\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ et de viscosité de l'ordre de $\eta \sim 10^0\,\text{Pa}\,\text{s}$).

Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme. On pose $g' = \left(1 - \frac{\rho_{\text{glycérine}}}{\rho_{\text{acier}}}\right)$. L'axe (Oz) est vertical ascendant.

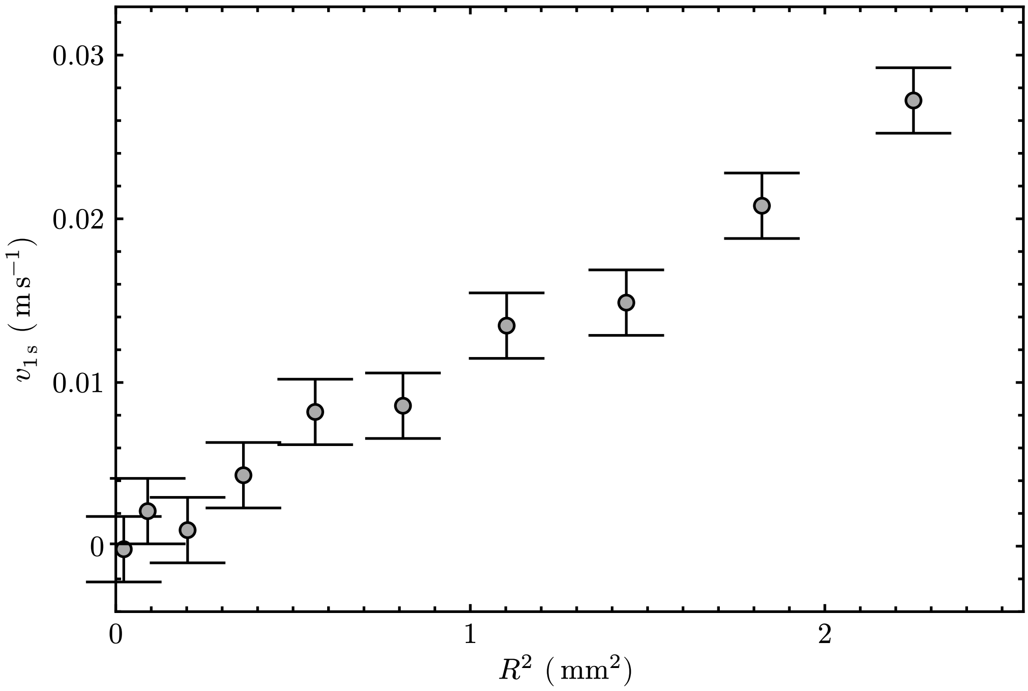
L'éprouvette est de diamètre très supérieur à celui de la bille. La force de frottements visqueux exercée par le fluide sur la bille est $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$.

1/ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la bille.

2/ Calculer la durée caractéristique τ associée à l'équation différentielle pour $R = 1.5\,\text{mm}$

3/ Exprimer la vitesse limite en fonction de R, g', ρ_{acier} et η.

4/ On mesure $v_{1\,\text{s}}$, la norme de la vitesse une seconde après avoir lâché la bille pour différentes tailles de bille. La courbe ci-dessous montre l'évolution de $v_{1\,\text{s}}$, en fonction de R^2. En déduire la valeur de la viscosité η de la glycérine.



5/ Calculer le nombre de Reynolds pour la plus grosse sphère. Est-il légitime de considérer des frottements fluides linéaires ?

8. 💻 Chute d'une bille dans un fluide peu visqueux ⋆

On lâche sans vitesse initiale une bille sphérique de rayon R, de masse m, dans un liquide visqueux, de masse volumique μ très faible devant celle de la bille, et de viscosité cinématique ν.

On suppose la pesanteur uniforme, et on note $\vec{v}(t) = -v(t)\vec{e}_z$ la norme de la vitesse de la bille.

On suppose que le nombre de Reynolds est compris entre $2 \cdot 10^3$ et $2 \cdot 10^5$. Dans ce cas, le coefficient de trainée d'une sphère est $C_x = 0.47$.

1/ Exprimer la force de frottement fluide sur la bille.

2/ Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$?

3/ Établir l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la bille.

4/ On cherche à résoudre numériquement l'équation différentielle pour obtenir $v(t)$.

Compléter le code Python suivant pour simuler la chute de la bille.

```
from math import pi
from scipy.integrate import solve_ivp
R = 0.01  # rayon de la bille en m
m = 0.1   # masse de la bille en kg
mu = 1    # masse volumique du fluide en kg/m^3
Cx = 0.47 # coefficient de traînée
g = 9.81  # accélération due à la pesanteur en m/s^2

def dvdt(t, v): # renvoie la dérivée de la vitesse
    ...

v0 = 0  # vitesse initiale en m/s

sol = solve_ivp(dvdt, (0,10), [v0])
t = sol.t
v = sol.y[0]
```

5/ Tracer la vitesse de la bille en fonction du temps.

6/ Expliquer pourquoi la modélisation proposée pose problème aux premiers instants du mouvement.

7/ Des relevés expérimentaux du coefficient de trainée en fonction du nombre de Reynolds sont donnés dans un fichier téléchargeable à l'adresse suivante

https://nuage03.apps.education.fr/index.php/s/APPGg6586cnHELy

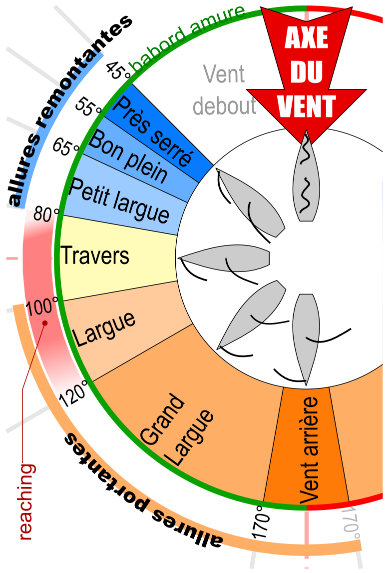
Compléter le code Python suivant pour calculer la force de trainée à partir de ces données expérimentales.

```
import numpy as np

data = np.loadtxt('Cx-Re.csv', delimiter=',', skiprows=1)

Re_exp = ... # première colonne de data
Cx_exp = ... # deuxième colonne de data

eta = 1.85e-5  # viscosité dynamique de l'ai en Pa.s

def Fx(v):
    Re = ...
    Cx = np.interp(Re, Re_exp, Cx_exp) # interpolation du coefficient de traînée à partir des données expérimentales
    return ...
```

8/ Modifier le code de la question 4 pour prendre en compte cette nouvelle expression de la force de trainée, et tracer la vitesse de la bille en fonction du temps.

9. 💬 J'explique à mon grand-père : Voilier au près

Le but de cet exercice est de vous faire expliquer un concept/phénomène avec des mots simples et courants (pas de vocabulaire technique ou scientifique) à une personne de votre entourage. Tachez de faire simple et court, utilisez des analogies avec des choses connues. Vous pouvez vous inspirer de Ma thèse en 180 secondes. Profitez-en pour prendre des nouvelles !



Les voiliers sont capables de remonter au vent. Expliquer comment c'est possible.

10. 💻 Tir cadré ? ⋆

On étudie un tir au football. La vitesse initiale du ballon est de $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ selon l'axe x (horizontal) et de $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ selon l'axe z (vertical). Le ballon est sur le sol juste avant le tir.

Dans un premier temps, on ne prend en compte que la gravité.

1/ Établie l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ du ballon. Exprimer la dérivée de la vitesse.

On résout numériquement l'équation différentielle en utilisant la fonction `solve_ivp` de la bibliothèque `scipy.integrate`.

2/ Compléter le code suivant.

```
from scipy.integrate import solve_ivp, trapezoid
import numpy as np

g = 9.81 # m/s^2
rho = 1.2 # kg/m^3
v0 = np.array([20, 0, 12]) # m/s

def dv_dt(t, v):
    a = ... # accélération
    return a

sol = solve_ivp(dv_dt, [0, 2], v0, max_step=0.01)

t = sol.t
vx = sol.y[0, :]
vy = sol.y[1, :]
vz = sol.y[2, :]
```

Il est maintenant nécessaire de calculer la position du ballon en intégrant la vitesse en utilisant la méthode des rectangles.

3/ Compléter le code suivant. Attention, les temps calculés par la fonction `solve_ivp` ne sont pas forcément régulièrement espacés.

```
x = [0]
y = [0]
z = [0]

for i in range(1, len(sol.t)):
    x.append(...)
    y.append(...)
    z.append(...)
```

Pour vérifier si le tir est cadré, on trace la trajectoire du ballon grâce au code suivant.

```
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")

ax.plot(x, y, z)

# Tracé des cages
x_cages = 14.5
y_cages = 0.3
l_cages = 7.32
h_cages = 2.44
ax.plot(
    [x_cages]*4,
    [y_cages, y_cages, y_cages + l_cages, y_cages + l_cages],
    [0, h_cages, h_cages, 0],
    color="orange")

# Mise en forme
ax.set_xlabel("x (m)")
ax.set_ylabel("y (m)")
ax.set_zlabel("z (m)")
ax.set_title("Trajectoire 3D")
ax.set_zlim(0, max(z)*1.1)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

4/ Le tir est-il cadré ?

On prend maintenant en compte les frottements avec l'air. On donne les valeurs numériques suivantes : $\rho = 1.2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $C_x = 0.47$, $R = 0.11\,\mathrm{m}$ et $m = 145\,\mathrm{g}$

5/ Modifier la fonction `dv_dt` pour inclure la force de traînée.

On pourra utiliser la fonction `np.linalg.norm(v)` pour calculer la norme du vecteur vitesse v.

Le tir est-il maintenant cadré ?

Le footballeur a mis de l'effet dans la balle en lui imprimant une rotation de $\Omega = 100\ \mathrm{min}^{-1}$ autour de l'axe (Oz). Cette rotation engendre une force de portance appelée force de Magnus et s'exprimant comme $\frac{1}{2} C \rho R^3 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ avec $C \approx 1$.

6/ Modifier la fonction `dv_dt` pour inclure la force de Magnus.

Le tir est-il maintenant cadré ?