

Physique des ondes 2

Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion

Compétences

- ☐ Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles.
- ☐ Établir la relation de dispersion.
- ☐ Relier, pour un signal proportionnel à $\exp(j(\omega t - \underline{k}x))$, la partie réelle de $\underline{k}$ à la vitesse de phase et la partie imaginaire de $\underline{k}$ à une dépendance spatiale de l'amplitude.
- ☐ Déterminer la vitesse de groupe.
- ☐ Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.
- ☐ faLaptop À l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement.
- ☐ Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.
- ☐ Pour une onde dans un conducteur ohmique :
 - ☐ Identifier une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion.
 - ☐ Établir l'expression de l'épaisseur de peau.
 - ☐ Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz.
 - ☐ Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie.
 - ☐ Justifier que les champs électrique et magnétique sont nuls dans un conducteur parfait.
- ☐ Pour une onde dans un plasma dilué :
 - ☐ Exprimer la conductivité complexe du milieu et établir la relation de dispersion.
 - ☐ Relier la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère.
 - ☐ Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance moyenne échangée entre le champ et les porteurs.
 - ☐ Distinguer qualitativement les ondes évanescentes et les ondes progressives du point de vue du transport de l'énergie.

Questions de cours des interrogations orales

- ☐ Montrer qu'un conducteur ohmique est localement neutre. Établir l'équation de propagation du champ électrique.
- ☐ Pour une O(P)PH vérifiant une équation de diffusion, établir la relation de dispersion. En déduire la profondeur de peau. Donner sa valeur dans le cuivre à qty (« 50 », « Hz »).
- ☐ Définir et représenter un paquet d'onde. Donner le lien entre étendue temporelle et largeur spectrale. Dans le cas simple d'un paquet d'onde constitué de seulement deux ondes sinusoïdales, montrer que l'enveloppe se propage à la vitesse de groupe.
- ☐ Donner l'expression d'une O(P)PH dans un milieu linéaire quelconque. Définir vitesse de phase, vitesse de groupe et profondeur de peau.
- ☐ Définir un plasma dilué. Établir la conductivité d'un plasma. En déduire que le champ électromagnétique ne cède pas de puissance aux porteurs de charge en moyenne.
- ☐ Établir la relation de dispersion pour une onde électromagnétique plane progressive harmonique dans un plasma dilué. Présenter les solutions pour $\omega > \omega_p$ et déterminer leur vitesse de groupe et de phase.
- ☐ Établir la relation de dispersion pour une onde électromagnétique plane progressive harmonique dans un plasma dilué. Présenter les solutions pour $\omega < \omega_p$ et montrer qu'elles ne transportent pas d'énergie en moyenne.

Entrainements

- ☐ [8.9](#) ☐ [8.10](#) ☐ [8.11](#) ☐ [8.12](#) ☐ [8.13](#) ☐ [8.14](#) ☐ [8.15](#) ☐ [8.16](#) ☐ [8.17](#) ☐ [24.1](#)
- ☐ [24.2](#) ☐ [24.3](#) ☐ [24.4](#) ☐ [24.5](#) ☐ [24.6](#) ☐ [24.7](#) ☐ [24.8](#) ☐ [24.9](#) ☐ [24.10](#) ☐ [24.13](#)
- ☐ [24.14](#) ☐ [24.16](#)

Exercices

- ☐ [Exercice 1](#) ☐ [Exercice 2](#) ☐ [Exercice 3](#) ☐ [Exercice 4](#) ☐ [Exercice 5](#) ☐ [Exercice 6](#)
- ☐ [Exercice 7](#)

Devoirs maison

- ☐ DM 1

Résumé du cours

1. Ondes dans les milieux diffusifs

1.1. Onde électromagnétique dans un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique est un milieu où la loi d'ohm locale est vérifiée.

EXEMPLE

Solution électrolytique, métal.

1.1.1. Retour sur le modèle de Drude

La loi d'ohm locale a été démontrée en supposant le champ électrique uniforme et stationnaire, et en l'absence de champ magnétique.

APPLICATION

1

Comparer en ordre de grandeur les termes électrique et magnétique de la force de Lorentz.

APPLICATION

2

On peut supposer le champ uniforme à condition qu'il varie peu à l'échelle du libre parcours moyen des porteurs de charge (10^{-8} m). Calculer jusqu'à quelle fréquence cette hypothèse est valide dans le cuivre.

La loi d'ohm locale reste valable à condition que la période de l'onde soit très petite devant le temps moyen entre deux chocs.

1.1.2. Équation de propagation

Neutralité locale du métal

3

Hypothèses :

- La fréquence $f < 10^{14}$ Hz
- La conductivité est du même ordre de grandeur que celle du cuivre

Avec

- ρ la densité volumique de charge (C m^{-3})

$$\rho \approx 0$$

Équation de propagation de l'onde

4

Hypothèses :

- La fréquence $f < 10^{14}$ Hz
- La conductivité est du même ordre de grandeur que celle du cuivre

Avec

- $\vec{E}$ le champ électrique (V m^{-1})
- $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$ le coefficient de diffusion ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (H m^{-1})
- γ la conductivité électrique du milieu (S m^{-1})

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - D \Delta \vec{E} = 0$$

Dans un conducteur ohmique, le champ électrique obéit à une équation de diffusion, tout comme la température (cf chapitre transfert thermique par conduction).

1.1.3. Relation de dispersion

Relation de dispersion pour une OPPH dans un milieu diffusif

5

Hypothèses :

- L'onde vérifie une équation de diffusion
- L'onde est une OPPH

$$k^2 = -j \frac{\omega}{D}$$

Avec

- ω la pulsation (rad s^{-1})
- k le nombre d'onde (rad m^{-1})
- $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$ le coefficient de diffusion ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)

Cette relation de dispersion n'admet pas de solution réelle. On introduit le nombre d'onde complexe $\underline{k} = k_r + jk_i$ solution de l'équation de diffusion.

2. Ondes progressives en milieu linéaire

2.1. Milieu linéaire

Pour une équation aux dérivées partielle linéaire, si y_1 et y_2 sont solutions, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est également solution.

EXEMPLE

Équation de d'Alembert, équation de diffusion.

Un milieu linéaire est un milieu dans lequel les équations aux dérivées partielle décrivant l'évolution des grandeurs sont linéaires.

EXEMPLE

L'air est un milieu linéaire pour les ondes sonores dans l'approximation acoustique. Les milieux homogènes sont des milieux linéaires pour les ondes thermiques.

2.2. Onde progressive harmonique

La définition d'une OPH peut être élargie pour être solution de n'importe quelle équation aux dérivées partielles linéaire.

Onde progressive harmonique

♥

$$\underline{y}(M, t) = \underline{y}_0 e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

Avec

- ω la pulsation (rad s^{-1})
- $\underline{k} = k \underline{u}$ le vecteur d'onde complexe (rad m^{-1})
- $\underline{k} = k_r + jk_i$ le nombre d'onde complexe (rad m^{-1})
- $\underline{u}$ le vecteur unitaire dans lequel l'onde se propage
- $\underline{y}_0 = y_0 e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe
- y_0 l'amplitude
- φ la phase à l'origine (rad)

APPLICATION

6

Déterminer l'expression réelle d'une OPH. On notera $\underline{k} = k_r + jk_i$.

2.3. Paquet d'onde

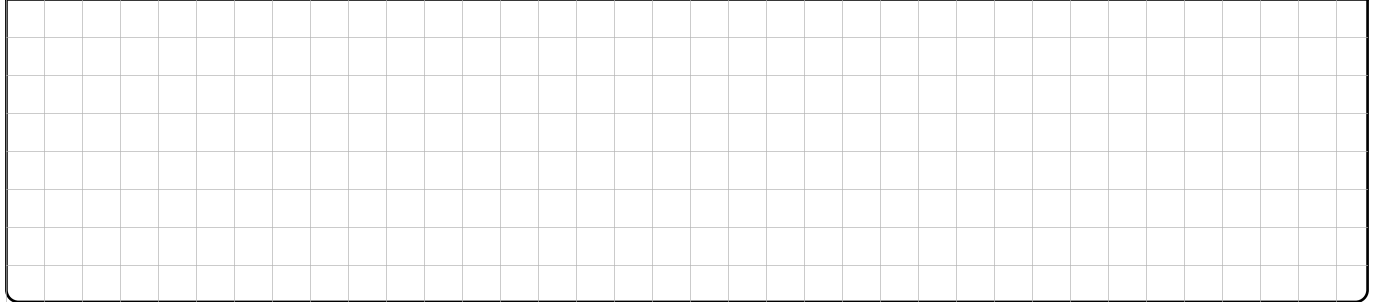


Une OPH a une extension temporelle et spatiale infinie, ce qui ne correspond pas aux ondes réelles.

Un paquet d'onde est une superposition d'OPH de pulsations proches et d'extension spatiale et temporelle finie.

Dans un milieu linéaire, on peut étudier la propagation d'un paquet d'onde en étudiant la propagation de chacune des OPH qui le composent.

SCHÉMA : Représentations temporelle et fréquentielle d'un paquet d'onde



La largeur spectrale du paquet d'onde est reliée avec son étendue temporelle.

Relation entre étendue temporelle et largeur spectrale

$$\Delta f \sim \frac{1}{\Delta t}$$

Avec

- Δf la largeur spectrale du paquet d'onde (Hz)
- Δt l'étendue temporelle du paquet d'onde (s)

APPLICATION

7

Un laser femtoseconde produit des impulsions de très courte durée (de l'ordre de la centaine de femtosecondes). Calculer l'ordre de grandeur de la largeur spectrale d'un laser femtoseconde rouge et comparer à la fréquence moyenne.

2.4. Vitesse de phase

La partie réelle de $\underline{k}$ est en lien avec la propagation de la phase.

Vitesse de phase

♥

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})}$$

Avec

- ω la pulsation (rad s^{-1})
- $\underline{k} = k_r + jk_i$ le nombre d'onde complexe (rad m^{-1})

La vitesse de phase représente la vitesse à laquelle la phase se propage.

Un milieu **dispersif** est un milieu dans lequel la vitesse de phase dépend de la pulsation.

APPLICATION

8

Déterminer la vitesse de phase d'une OPPH se propageant dans le sens des x croissants dans un milieu vérifiant l'équation de diffusion. Le milieu est-il dispersif ?

Dans un milieu dispersif, les différentes composantes d'un paquet d'onde se propagent à des vitesses différentes, ce qui entraîne un étalement du paquet d'onde.



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b0/Wave_packet_-_%28dispersion%29.gif

2.5. Profondeur de peau

La partie imaginaire de $\underline{k}$ est liée avec la variation de l'amplitude au cours de la propagation de l'onde.

Profondeur de peau¹

$$\delta = \frac{1}{|\text{Im}(\underline{k})|}$$

Avec

- δ la profondeur de peau (m)
- $\underline{k} = k_r + jk_i$ le nombre d'onde complexe (rad m^{-1})

Quand l'onde a parcouru quelques fois la profondeur de peau, son amplitude devient négligeable.

APPLICATION

🔗⁹

Déterminer la profondeur de peau d'une OPPH se propageant dans le sens des x croissants dans un milieu vérifiant l'équation de diffusion. Le milieu est-il dispersif ? Déterminer la profondeur de peau.

Au fur et à mesure de la propagation dans un conducteur ohmique, l'onde électromagnétique perd de l'énergie qui est convertie en chaleur par effet Joule.

Profondeur de peau dans le cuivre pour la fréquence du secteur

♥ 🔗¹⁰

Hypothèses :

- La conductivité du cuivre est $6 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$
- La fréquence est celle du secteur (50 Hz)

$$\delta_{\text{cuivre}} \approx 1 \text{ cm}$$

APPLICATION

🔗¹¹

Calculer la profondeur de peau pour une onde thermique dans un sol de diffusivité thermique $0.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ en considérant les variations journalières de température.

2.6. Vitesse de groupe

Dans un milieu dispersif, toutes les pulsations ne se propagent pas à la même vitesse. Il en résulte un étalement des paquets d'onde.

APPLICATION

🔗¹²

On considère un paquet d'onde simplifié constitué de deux OPH de fréquences proches : $y(x, t) = \cos(\omega t - kx) + \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x)$. En l'écrivant comme un produit de cosinus, montrer que son enveloppe se propage à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}$ et que sa phase se propage à la vitesse $\frac{\omega}{k}$.

¹Aussi appelée épaisseur de peau ou longueur de pénétration.

$$v_g = \frac{d\omega}{d \operatorname{Re}(\underline{k})}$$

Avec

- v_g la vitesse de groupe (m s^{-1})
- ω la pulsation (rad s^{-1})
- $\underline{k} = k_r + jk_i$ le nombre d'onde complexe (rad m^{-1})



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bd/Wave_group.gif?uselang=fr

La vitesse de groupe est la vitesse à laquelle l'enveloppe d'un paquet d'onde se propage.

2.7. Aspect énergétique pour une OPFH dans un conducteur ohmique

APPLICATION

13

On considère une OPFH électromagnétique dans un conducteur ohmique $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$. Déterminer le champ magnétique puis le vecteur de Poynting.

L'onde a de moins en moins d'énergie au fur et à mesure de sa propagation. Le conducteur ohmique a absorbé de l'énergie qui a été convertie en chaleur par effet Joule.

Un métal parfait est un métal de conductivité électrique infinie.

Dans un métal parfait, la profondeur de peau est nulle. Dans un métal parfait, les champs électrique et magnétique sont nuls.

3. Ondes électromagnétiques un plasma

3.1. Le plasma

Un **plasma** est un état de la matière. Dans un plasma, des atomes ou des molécules ont été ionisés. Dans un plasma, il y a des électrons, des cations et éventuellement des espèces neutres. Un plasma est globalement neutre.

EXEMPLE

Les éclairs, le soleil et les flammes de haute température sont des plasmas.

EXEMPLE

L'ionosphère est une couche de la haute atmosphère ionisée par le rayonnement solaire.

Dans un plasma **dilué**, la concentration est faible. Dans un plasma dilué, les particules n'interagissent pas entre elles.

3.2. Conductivité d'un plasma

Les ions ont une masse bien supérieure à celle des électrons, le déplacement des ions peut donc être négligé.

Hypothèses :

- Pour une OPPH polarisée rectilignement
- Le plasma est dilué
- Les ions sont immobiles

$$\underline{\gamma} = -j \frac{ne^2}{\omega m_e}$$

Avec

- γ la conductivité électrique du milieu (S m^{-1})
- n la densité particulaire d'électrons (m^{-3})
- ω la pulsation (rad s^{-1})
- m_e la masse d'un électron (kg)
- e la charge élémentaire (C)

La conductivité est imaginaire, ce qui traduit un déphasage entre le champ électrique et le vecteur densité volumique de courant.

APPLICATION

15

On considère une OPPH $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_y$. Déterminer le vecteur densité volumique de courant électrique puis la densité volumique de puissance cédée par l'onde aux porteurs de charge et enfin sa valeur moyenne.

Un plasma ne reçoit en moyenne pas de puissance du champ électromagnétique.

3.3. Relation de dispersion

Relation de dispersion

16

Hypothèses :

- Pour une OPPH polarisée rectilignement
- Le plasma est dilué
- Les ions sont immobiles

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right)$$

Avec

- $\underline{k} = k_r + jk_i$ le nombre d'onde complexe (rad m^{-1})
- ω la pulsation (rad s^{-1})
- $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}$ la pulsation plasma (rad s^{-1})
- c la célérité de la lumière dans le vide (m s^{-1})
- n la densité particulaire d'électrons (m^{-3})
- e la charge élémentaire (C)
- m_e la masse d'un électron (kg)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (F m^{-1})

Les solutions de la relation de dispersion dépendent du signe de $1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$.

APPLICATION

17

Calculer la pulsation plasma pour l'ionosphère ($n \approx 10^5 \text{ cm}^{-3}$).

La fréquence de coupure correspondant à la pulsation plasma est de l'ordre de 10 MHz pour l'ionosphère.

3.4. Pulsation supérieure à la pulsation plasma

Dans ce cas, la relation de dispersion a deux solutions réelles : $\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.

Le nombre d'onde est réel, ce qui traduit une propagation de l'onde sans atténuation dans l'ionosphère.

L'onde est une onde progressive qui transporte donc de l'énergie.

APPLICATION

18

Déterminer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g pour une OPPH dans l'ionosphère vérifiant $\omega > \omega_p$. Tracer v_φ et v_g en fonction de ω . L'ionosphère est-elle un milieu dispersif.

3.5. Pulsation inférieure à la pulsation plasma

Dans ce cas, la relation de dispersion a deux solutions imaginaires pures : $\underline{k} = \pm j \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$.

L'onde obtenue est une onde évanescence. Une onde évanescence est une onde stationnaire qui décroît exponentiellement avec la position.

Onde évanescence



$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) e^{k_i x}$$

Avec

- ω la pulsation (rad s^{-1})
- k_i la partie imaginaire du nombre d'onde complexe (rad m^{-1})

APPLICATION

19

Déterminer le vecteur de Poynting pour une onde évanescence $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \varphi) e^{k_i x} \vec{e}_y$ puis sa valeur moyenne.

Une onde évanescence ne transporte pas d'énergie en moyenne.

Lorsque $\omega < \omega_p$ les ondes ne traversent pas l'ionosphère, elles sont réfléchies.

Exercices

1. ☺ J'explique à une amie : Différence de vitesse entre la fibre optique et l'ADSL

Le but de cet exercice est de vous faire expliquer un concept/phénomène avec des mots simples et courants (pas de vocabulaire technique ou scientifique) à une personne de votre entourage. Tachez de faire simple et court, utilisez des analogies avec des choses connues. Vous pouvez vous inspirer de Ma thèse en 180 secondes. Profitez-en pour prendre des nouvelles !

L'ADSL utilise des câbles en cuivre pour transmettre les données, tandis que la fibre optique utilise des fibres de verre ou de plastique. La fibre optique permet une transmission de données à des vitesses beaucoup plus élevées que l'ADSL.

Pourquoi la fibre optique est-elle plus rapide que l'ADSL ?

2. Corde vibrante soumise à des frottements visqueux

On étudie une corde vibrante, de longueur L , de masse linéique μ , attachée à ses deux extrémités. Elle est confondue avec l'axe (Ox) au repos. Elle est tendue sous une tension T et est soumise à une force dissipative de frottement fluide : un élément de longueur dx de corde, dont le déplacement $y(x, t)$ est transversal suivant $\vec{e}_y$ est soumis à la force $-\alpha \frac{\partial y}{\partial t} dx \vec{e}_y$.

1/ Établir l'équation d'onde vérifiée par l'onde dans la corde. On introduira les coefficients $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ et $a = \frac{\alpha}{T}$.

2/ On cherche une solution à variables séparées en $y(x, t) = f(x)g(t)$. À quelles équations différentielles les deux fonctions f et g obéissent-elles ?

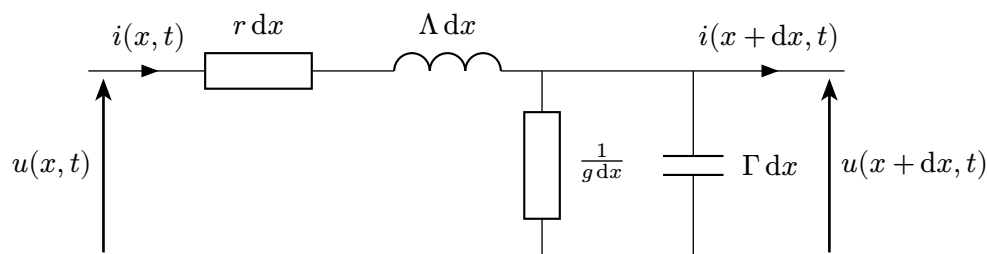
3/ Quelles sont les familles de solutions de l'équation sur f . On répondra en distinguant 3 cas sur la valeur de K . Parmi ces familles, laquelle admet des solutions non nulles compatibles avec les conditions aux limites ?

4/ Résoudre l'équation sur g . On se placera dans le cas de frottements faibles, et on précisera explicitement l'inégalité qu'implique cette hypothèse. On ne cherchera pas à expliciter les constantes.

5/ En déduire la durée caractéristique d'amortissement des oscillations. Que devient l'énergie initialement contenue dans la vibration de la corde ?

3. Câble coaxial et pertes résistives

Les pertes dans un câble coaxial sont prises en compte considérant la résistance linéique r du conducteur et la conductance linéique g de l'isolant séparant l'âme et le gaine. Le modèle à constantes réparties correspondant est représenté sur le schéma ci-dessous correspondant à une portion de câble de longueur dx .



1/ Établir une relation entre $u(x, t)$, $i(x, t)$ faisant intervenir Γ et g .

2/ Établir une relation entre $u(x, t)$, $i(x, t)$ faisant intervenir Λ et r .

3/ En déduire que $u(x, t)$ satisfait à l'équation dite des télégraphistes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial t} - \mu u(x, t) = 0$$

Préciser l'expression de α , β , et μ en fonction des paramètres de l'énoncé. On admet que i obéit à la même équation.

4/ On considère une onde qui se propage dans le sens de x croissants : $\underline{u}^+(x, t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$. Établir l'équation de dispersion.

5/ On pose $\underline{k} = k' + jk''$. Qu'implique le fait que $\underline{k}$ soit complexe ?

6/ On suppose les pertes faibles et donc la profondeur de peau très grande devant la longueur d'onde. Résoudre l'équation de dispersion dans ce cas et exprimer k' et k'' en fonction de α , β , μ et ω .

7/ Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de ω et des constantes α , β , et μ . Le milieu est-il dispersif ?

4. Ondes sonores dans un fluide visqueux

On étudie une onde sonore dans un fluide. L'onde est plane, progressive et se déplace dans le sens des x croissants. Au repos, la masse volumique du fluide est ρ_0 et la pression P_0 . Le coefficient de compressibilité adiabatique est χ_S . L'effet de la pesanteur est négligé. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

On tient compte de la viscosité du fluide. La résultante volumique des forces de viscosité est $\eta \Delta \vec{v}$, où v est le champ des vitesses dans le fluide. On note P_1 le champ de surpression.

1/ Montrer que le théorème de la résultante cinétique appliqué à une particule de fluide, dans l'approximation acoustique, en projection sur l'axe (Ox) donne

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

2/ Montrer que l'équation d'onde dans ce fluide visqueux s'écrit

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \eta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$$

3/ L'onde est plane, progressive et harmonique de fréquence $f = 1.0 \cdot 10^3$ Hz et se propage dans le sens des x croissants. On suppose le milieu faiblement dispersif, c'est-à-dire $\eta \chi_S \omega \ll 1$. Établir l'équation de dispersion puis l'épaisseur dont on effectuera l'application numérique pour l'air à 20 °C. On donne la viscosité de l'air $\eta = 1.85 \cdot 10^{-5}$ Pa·s

4/ Est-ce la raison pour laquelle on entend moins bien un son quand on s'éloigne de sa source ?

5. Simulation de la température dans le sol

Dans le sol, la température vérifie une équation de diffusion de coefficient de diffusion $D \approx 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Les données à la surface sont acquises régulièrement par des stations météorologiques. Les données pour Quimper sont disponibles à l'adresse suivante : <https://nuage03.apps.education.fr/index.php/s/LgXjiwKxJxcrZmz>. Le temps est donné en secondes depuis le 1er janvier 1970 à 00:00:00 UTC. La température est donnée en degrés Celsius. Les mesures sont effectuées toutes les heures.

On peut importer les données dans Python grâce aux instructions suivantes

```
1 import numpy as np
2 data = np.load("test.npy")
3 t = data[:,0] # temps en secondes
4 Tz0 = data[:,1] # température à la surface (en z=0) en degrés Celsius
```

1/ Tracer la température à la surface en fonction du temps.

On souhaite simuler la température dans le sol sur une profondeur de 10 m à l'aide de la méthode d'Euler explicite généralisée aux équations aux dérivées partielles.

La température à l'instant $t_i = t_0 + i\Delta t$ à la profondeur $z_j = j\Delta z$ est notée $T_{i,j}$. On choisit 101 points de profondeur.

2/ Calculer le pas de profondeur Δz . La condition de stabilité de la méthode d'Euler $2D\Delta \frac{t}{\Delta} z^2 < 1$ est-elle vérifiée ?

3/ Exprimer $T_{i,j}$ en fonction de $T_{i-1,j}$, $T_{i-1,j-1}$, $T_{i-1,j+1}$, D , Δx et Δt grâce à la méthode d'Euler explicite.

4/ Compléter le code suivant implémentant la méthode d'Euler explicite pour simuler la température dans le sol.

```

1  Nx = ... # nombre de pas de profondeur
2  L = 10 # longueur de la colonne de sol simulée (en m)
3  x = np.linspace(..., ..., ...) # liste des profondeurs des points simulés (en m)
4
5  T = np.zeros((Nt,Nx)) + Tz0[0] # initialisation de la matrice de température
6  dt = 3600 # pas de temps (en s)
7  dx = L/(Nx-1) # pas de profondeur (en m)
8  D = 1e-6 # coefficient de diffusion (en m^2/s)
9
10 for i in range(1, Nt):
11     T[i,0] = ... # condition à la surface
12     for j in range(1, Nx-1):
13         T[i,j] = ... # schéma d'Euler explicite
14     T[i,-1] = T[i,-2] # le dernier point n'a pas de voisin de droite, on ne peut pas appliquer
15                       # le schéma d'Euler explicite, on reprend la température du point
16                       # précédent (condition de Neumann)

```

5/ Tracer la température en fonction du temps pour des profondeurs de 0 m, 10 cm, 1 m et 10 m.

6/ Écrire une suite d'instruction permettant de calculer à quelle profondeur minimale faut-il enterrer une conduite d'eau pour qu'elle ne subisse pas le gel.

7/ Compléter le code ci-dessus pour animer la propagation de l'onde dans un plasma. La fonction `line.set_data` prend les mêmes arguments que la fonction `plot` : les abscisses et les ordonnées des points à tracer.

```

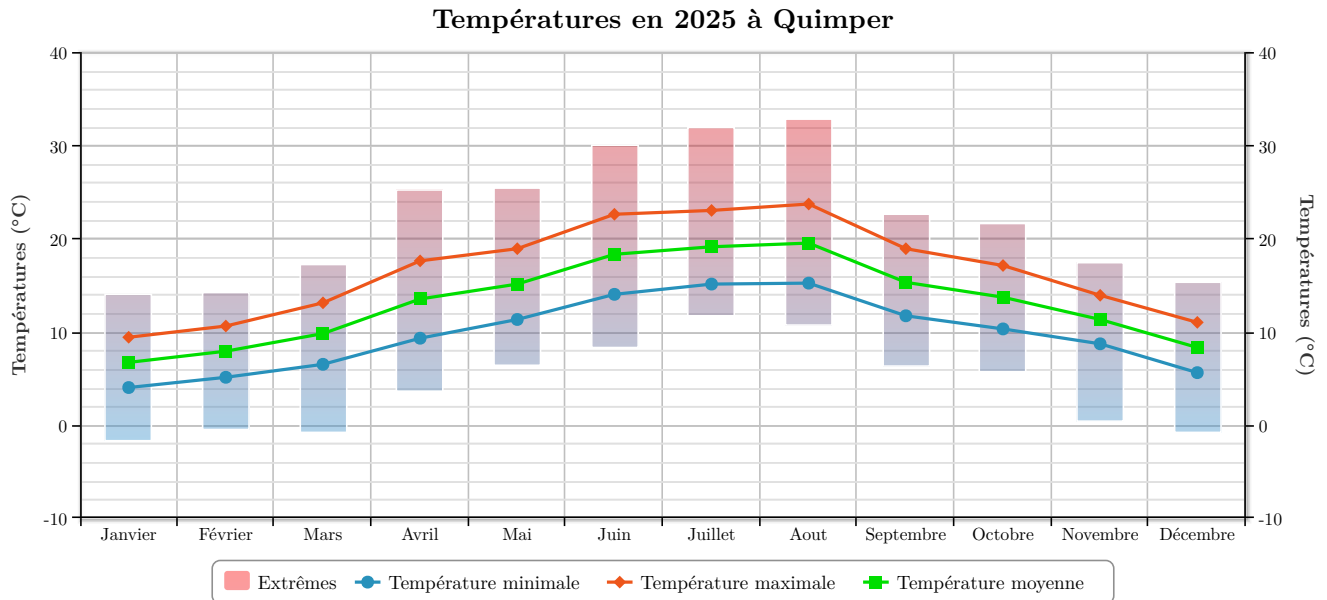
1  import matplotlib.animation as animation
2  from datetime import datetime, timezone
3
4  def formateDate(t): # met en forme le temps pour afficher la date et l'heure
5      return datetime.fromtimestamp(t, tz=timezone.utc).strftime("%d/%m/%Y %H:%M")
6
7  fig, ax = plt.subplots()
8  plt.clf()
9  ax = fig.add_subplot(111)
10 line, = ax.plot(..., ...) # tracé du profil de température à l'instant initial t0
11
12 ax.set_ylim(..., ...) # on choisit les limites de l'axe des ordonnées pour que la courbe soit bien visible
13 ax.set_xlabel("Profondeur (m)")
14 ax.set_ylabel("Température (°C)")
15 title = ax.set_title("")
16
17 def animate(i):
18     line.set_data(..., ...) # tracé du profil de température à l'instant initial ti
19     title.set_text(formateDate(t[i]))
20     return line, title
21
22 ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=range(0,Nt,10), interval=10, blit=False, repeat=False)
23 plt.show()

```

6. 🧠 Germination des lys ★★

Cet exercice est un problème ouvert. Il nécessite de prendre des initiatives et de faire des choix dans la modélisation. Des approximations et des estimations sont souvent nécessaires pour arriver à une solution.

On a planté des bulbes de lys à une quinzaine de centimètres dans du terreau (diffusivité thermique de l'ordre de $1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). Pour commencer leur germination, les bulbes ont besoin d'une température d'environ 10°C .



À quelle date la germination commence-t-elle ?

7. 💻 Simulation de la propagation d'un paquet d'onde dans un plasma ★

On s'intéresse à la propagation d'un paquet d'onde $s(x, t)$ dans un milieu pouvant être dispersif.

Le paquet d'onde est connu en $x = 0$:

$$s(0, t) = f(t, 0, \Delta t) \cos(\omega t)$$

où $f(t, 0, \Delta t)$ est la fonction gaussienne centrée en 0 et d'extension temporelle Δt .

Pour déterminer comment le paquet d'onde se propage, on le décompose grâce au théorème de Fourier et on étudie la propagation de chaque signal monochromatique composant le paquet d'onde.

1/ Compléter le code ci-dessous pour définir s_{x0} avec $s(0, t)$.

```
1 import numpy as np
2
3 Deltat = 0.4 # extension temporelle (s)
4 t = np.linspace(-2, 10, 1000) # temps pour lesquels on calcul s (s)
5
6 def gaussienne(x, mu, sig): # Définition d'une gaussienne de x. sigma est la largeur à mi-hauteur et mu
7 la position du centre.
8     return 1. / (np.sqrt(2. * np.pi) * sig) * np.exp(-np.power((x - mu) / sig, 2.) / 2)
9
10 s_x0 = ... # onde s(x=0,t) en x=0
```

2/ Tracer l'onde en $x = 0$ en fonction de t .

La décomposition spectrale consiste à décomposer un signal comme une somme de signaux monochromatiques

$$s(x=0, t) = \sum_i \underline{A}_i e^{j\omega_i t}$$

On peut calculer le spectre du paquet d'onde pour obtenir la liste des $\underline{A}_i$ grâce à la fonction `rfft`.

3/ Calculer le spectre de $s(x=0, t)$ et tracer $|\underline{A}|$ en fonction de la fréquence en complétant le code ci-dessous.

```
1 from numpy.fft import rfft, irfft, rfftfreq
2
3 frequencies = rfftfreq(len(t), t[1]-t[0]) # calcul des fréquences de la transformée de Fourier (Hz)
4 pulsations = ... # pulsations (rad/s)
5 spectre_x0 = ... # spectre de s(x=0,t) (c'est-à-dire liste des A_i)
6
7 plt.figure()
8 plt.clf()
9 plt.plot(...)
10 plt.xlabel(...)
11 plt.title("spectre de s en x=0")
12 plt.show()
```

4/ En faisant varier `Deltat`, quel est l'effet de l'extension temporelle du paquet d'onde sur son spectre ?

On utiliser `Deltat = 0.4` dans toute la suite.

5/ Si une onde OPPH s'écrit $\underline{A}_i e^{j\omega_i t}$ en $x=0$, comment s'écrit-elle après avoir parcouru une distance x dans le milieu ?

La fonction `irfft` permet de réaliser l'opération inverse à la transformée de Fourier : elle calcule le signal à partir de son spectre.

6/ Compléter le code ci-dessous.

```
1 j = 1j
2 c = 1
3
4 def rd(omega): # relation de dispersion : calcule k(omega) et le renvoie
5     c = 1 # célérité
6     #####
7     # D'Alembert
8     # return ...
9     #####
10    # Plasma
11    omega_p = 2*np.pi # pulsation plasma
12    if omega > omega_p:
13        return ...
14    else:
15        return 0 # pour des raisons de stabilité dépassant le programme, on laisse 0 pour ce cas-ci
16    #####
17
18 x = 3 # position où calculer l'onde
19 k = np.array(...) # nombres d'onde complexes calculés grâce à la relation de dispersion
20 spectre_x = ... # spectre de s en x
21 s_x = ... # calcul de s(x,t) à l'abscisse x
```

7/ Tracer l'onde après propagation sur une longueur $x = 3m$ pour une onde vérifiant l'équation de d'Alembert puis dans un plasma. Vérifier l'existence d'un étalement du paquet d'onde pour l'onde dans un plasma. Est-ce que les hautes fréquences ou les basses fréquences se propagent plus vite ?

On souhaite maintenant visualiser la propagation de l'onde en traçant $s(x, t)$ en fonction de x à t fixé. Pour cela, il faut calculer s pour un grand nombre de x en utilisant la même méthode que précédemment.

8/ Compléter le code ci-dessous puis tracer $s(x, t)$ en fonction de x pour différents temps de sorte à visualiser la propagation de l'onde. Quelles fréquences sont plus rapides (hautes ou basses) ? Est-ce cohérent avec votre réponse précédente ?

```
1 x = np.linspace(-3,6,1000) # abscisses auxquelles l'onde sera calculée
2
3 s = np.zeros((len(x),len(t))) # s est un array à 2 dimensions dont les lignes correspondent à une position
4 et les colonnes à un instant
5
6 s[0,:] = ...
7 for i in range(1,len(t)):
8     s[i,:] = ...
9
10
11 plt.figure(4)
12 plt.clf()
13 i = 500 # à changer pour changer l'instant auquel l'onde est tracée
14 plt.plot(x,s[:,i])
15 plt.xlabel(...)
16 plt.title(f"signal à t={t[i]} s")
    plt.show()
```

Afin de visualiser la propagation de l'onde d'une façon plus commode, on peut animer l'évolution de l'onde.

```
1 import matplotlib.animation as animation
2
3 fig = plt.figure(5) # initialise la figure
4 plt.clf()
5 line, = plt.plot(x, s[:,0])
6
7 def animate(i):
8     line.set_data(t, s[:,i])
9     return line,
10
11 ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=1000, interval=10, blit=True, repeat=False)
12 plt.show()
```