# Électronique 1
# Stabilité des systèmes linéaires

## Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Transposer la fonction de transfert opérationnelle linéaire dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).
- ❑ Étudier la stabilité d'un système d'ordre 1 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.
- ❑ Étudier la stabilité d'un système d'ordre 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.

# Résumé du cours

## 1 Introduction

**Application** ✎1

Pour chacune des deux équations différentielles ci-dessous, dire si ses solutions divergent ou non.

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = 4$$

À la fin de ce chapitre, vous saurez répondre à cette question en un coup d'œil et sans calculs.

## 2 Système linéaire

Un système est un dispositif qui traite une ou des entrées et produit une ou des sorties.

**Schéma** Système

**Exemple**

Vanne (angle d'un robinet → débit), moteur électrique (tension → vitesse de rotation).

Un système linéaire est un système continu dont la sortie dépend linéairement de l'entrée.

**Schéma** Système linéaire

# 3 Équation différentielle et fonction de transfert

## 3.1 Exemple introductif : circuit RC série

### 3.1.1 Point de vue temporel

**Équation différentielle régissant la tension dans un circuit RC** ✎[2]

*Hypothèses*

- le circuit est dans l'ARQS

Schéma

*Avec*

- $s(t)$ tension aux bornes du condensateur (en V)
- $R$ résistance du résistor (en $\Omega$)
- $C$ capacité du condensateur (en F)
- $e(t)$ tension en entrée du circuit (en V)

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s = \frac{1}{RC}e(t)$$

### 3.1.2 Point de vue spectral

**Fonction de transfert d'un circuit RC** ✎[3]

*Hypothèses*

- le circuit est dans l'ARQS

Schéma

*Avec*

- $S(p)$ grandeur de Laplace associée à la tension aux bornes du condensateur (en V)
- $R$ résistance du résistor (en $\Omega$)
- $C$ capacité du condensateur (en F)
- $E(p)$ grandeur de Laplace associée à la tension en entrée du circuit (en V)
- $p$ variable de Laplace (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)

$$pS(p) + \frac{1}{RC}S(p) = \frac{1}{RC}E(p)$$

## 3.2 Relation entre équation différentielle et fonction de transfert

Une forte ressemblance entre les 2 équations précédentes peut être remarquée. Cette ressemblance peut être généralisée.

Correspondance entre les domaines

| temporel | de Laplace | Fréquentiel |
|---|---|---|
| $e(t)$ | $E(p)$ | $\underline{e}(j\omega)$ |
| $s(t)$ | $S(p)$ | $\underline{s}(j\omega)$ |
| $\frac{d}{dt}$ | $p$ | $j\omega$ |
| $\frac{d^2}{dt^2}$ | $p^2$ | $(j\omega)^2 = -\omega^2$ |

Application [4]

Déterminer la fonction de transfert associée à l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s = \frac{de}{dt}$$

Application [5]

Déterminer l'équation différentielle associée à la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$$

# 4 Stabilité

## 4.1 Présentation

Un système stable a une sortie bornée si son entrée est bornée.
En pratique, un système instable a sa sortie en saturation car elle ne peut pas augmenter ou diminuer indéfiniment.

## 4.2 Système du premier ordre

Influence du numérateur [6]

*Hypothèses*

- système linéaire

Le numérateur de la fonction de transfert n'influence la stabilité du système.

Critère de stabilité [7]

*Hypothèses*

- système linéaire
- système du 1er ordre

Le système est stable si les 2 coefficients du dénominateur sont de même signe.

**Application** ✎8

Les fonctions de transfert suivantes correspondent-elles à des systèmes stables ?

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$H(p) = \frac{1 + RCp}{1 - RCp}$$

**Application** ✎9

Les équations différentielles suivantes correspondent-elles à des sytèmes stables ?

$$2\frac{ds}{dt} - \frac{R}{L}s = \frac{de}{dt} - \frac{R}{L}e$$

$$\frac{ds}{dt} + \frac{R}{L}s = 0$$

$$2\frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} = \frac{R}{L}e - \frac{R}{L}s$$

## 4.3 Système d'ordre 2

**Critère de stabilité** ✎10

*Hypothèses*

- système linéaire
- système d'ordre 2

---

Le système est stable si les 3 coefficients du dénominateur sont de même signe.

**Application** ✎11

Les fonctions de transfert suivantes correspondent-elles à des systèmes stables ?

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp - LCp^2}$$

**Application** ✎12

Les équations différentielles suivantes correspondent-elles à des sytèmes stables ?

$$-LC\frac{d^2s}{dt^2} - RC\frac{ds}{dt} - s = -e$$

# Méthodes

## 1 Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 linéaire à coefficients constants

1. Résoudre l'équation homogène :
    - Mettre sous la forme canonique $\frac{ds}{dt} + \alpha s = 0$.
    - La solution est $s(t) = Ke^{-\alpha t}$ avec $K$ un réel.
2. Trouver 1 solution particulière : on la cherche de la même forme que le second membre.
3. Grâce aux conditions initiales, trouver $K$

**Application** 13

Résoudre $L\frac{di}{dt} + Ri = U$ où $U$ est une constante, sachant que $i(t = 0) = 0$

## 2 Résoudre une équation différentielle d'ordre 2 linéaire à coefficients constants

1. Résoudre l'équation homogène :
    - Déterminer le polynôme caractéristique.
    - Déterminer le signe du discriminent.
        - Si $\Delta > 0$ la solution est $K_1e^{r_1t} + K_2e^{r_2t}$ où $r_1$ et $r_2$ sont les racines du polynôme caractéristique.
        - Si $\Delta = 0$ la solution est $(K_1 + K_2t)e^{rt}$ où $r$ est la racine du polynôme caractéristique.
        - Si $\Delta < 0$ la solution est $(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))\, e^{\alpha t}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une des racines du polynôme caractéristique.
2. Trouver 1 solution particulière : on la cherche de la même forme que le second membre.
3. Grâce aux conditions initiales, trouver $K_1$ et $K_2$.

**Application** 14

Résoudre $LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = E$ en distinguant les 3 cas possibles, sachant que $u(0) = 0$ et $\left.\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{RC}$

# TD

## 1 Étude de fonctions de transfert

Pour chacune des fonctions de transfert ci-dessous, donner l'équation différentielle associée et dire si elles décrivent un système stable ou instable.

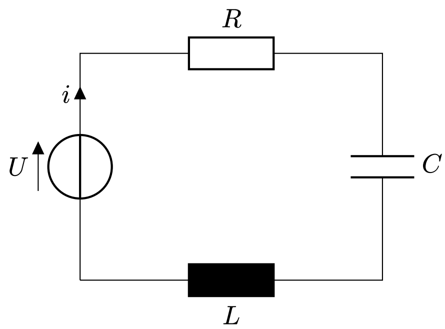
1. $H = \dfrac{p}{1+p}$
2. $H = \dfrac{p^2}{1-p+p^2}$
3. $H = \dfrac{1}{1+jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$

## 2 Filtres et fonctions de transfert

1. Proposer deux circuits électroniques différents réalisant un filtre passe-haut du premier ordre.
2. Donner (sans les redémontrer) les fonctions de transfert des ces deux circuits.
3. Ces deux circuits sont-ils stables ?

## 3 Oscillateur RLC

Dans le montage ci-dessous, le générateur impose une tension $U$ proportionnelle au courant $i$ qui le traverse. On note $\alpha$ le coefficient de proportionnalité, de sorte que $U = \alpha i$.




1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i$.
2. Sous quelle condition sur $\alpha$ le système est-il stable.