PSI **Novembre 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Polynômes d'endomorphismes et polynômes matriciels

Exercice 1. Soit $n \geq 2$.
On considère la matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^2.
2. Donner un polynôme annulateur de J.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Déterminer un polynôme annulateur de A.
4. montrer que A est inversible et calculer son inverse
5. Calculer $A^p, p \in \mathbb{N}$

Exercice 2. : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de A. Déterminer les puissances de A.

Exercice 3. : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^n, n \geq 2$, puis $(I_3 + M)^n$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de M.
3. Soit $\mathcal{C} = \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Montrer que c'est un s.e.v de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base.
4. Justifier que $\mathcal{C} = \mathbb{R}[M]$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 2.
2. Déterminer un polynôme annulateur de A.
3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
4. Expliciter l'ensemble des polynômes annulateurs de A.
5. Montrer que $\mathcal{P} = \{P(A) / P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier qu'il est de dimension finie et en Déterminer une base.

Exercice 5. : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de A. Déterminer une base $\{P(A) / P \in \mathbb{R}[X]\}$ de A.

Exercice 6. : Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le spectre réel de A est non vide.
2. Montrer que $A^2 + A + I_3 \neq 0$.

Exercice 7. : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A + 3I_3 = 0$ et $Tr(A) = 9$.
Déterminer les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 8. : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $P = (X+3)(X^2+X+1)$ est annulateur de A. Montrer que $\det(A)$ est de la forme $(-3)^k$ où $k \in \{0, .., n\}$.

Exercice 9. : On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Donner un polynôme annulateur de f.
2. En déduire que f est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $f^n, n \in \mathbb{Z}$.
4. $\mathcal{P} = \{P(f)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Justifier qu'il est de dimension finie et en Déterminer une base.

Exercice 10. : Oral CCINP.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ polynôme annulateur d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$-e.v. On suppose $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im} u$.

Exercice 11. : Oral Mines.

Montrer que, si A et B sont réelles, carrées d'ordre n, et telles qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, vérifiant $P(0) = 1$ et $P(A) = AB$, alors A est inversible et commute avec B.