PSI **Mars 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Espaces Préhilbertiens réels et Espaces euclidiens

Exercice 1. Soit E un espace préhilbertien réel. On note $< . >$ un produit scalaire sur E et $\|.\|$ sa norme associée.
Pour $(x, y) \in E \times E$, Développer $\|x+y\|^2$, $\|x-y\|^2$ et en déduire $< x, y >$ en fonction uniquement de $\|x+y\|^2$ et $\|x-y\|^2$.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P \mapsto \sqrt{(P(1))^2 + (P'(1))^2 + (P''(1))^2}$ est une norme sue E.

Exercice 3. Montrer que :

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln 3}{2}$$

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Vérifier que $\mathscr{F} = ((1,1,1),(1,-1,1),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et former à partir de cette base une b.o.n de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in E$, donner ses coordonnées dans cette b.o.n.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $F = \{(x, y, z) \in E / x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1,1,1);(1,-1,1))$, $D = \mathrm{Vect}\,((1,2,3))$.

1. Déterminer $F^\perp$,$G^\perp$,$D^\perp$.
2. Déterminer une b.o.n de F, de D.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.
4. Calculer la distance de $(1,1,1)$ à F, puis à G, et à D.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $H = \{P \in E / P(1) = 0\}$.

1. Déterminer $F^\perp$.
2. Déterminer une b.o.n de F.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de E du projecteur orthogonal sur F.
4. Calculer la distance de X à F.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\forall (P, Q) \in E \times E, \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que $<,>$: $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
3. Donner deux méthodes distinctes pour calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.
4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme, appelée polynôme de Laguerre, L_p par

$$\forall x \in \mathbb{R}, L_p(x) = \frac{e^x}{p!} h_p^{(p)}(x)$$

où $h_p : x \mapsto x^p e^{-x}$.

(a) Montrer que L_p est bien un polynôme : déterminer son degré et son coefficient dominant.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(L_p)_{0\leq n}$ est une b.o.n de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire défini ci-dessus.

Exercice 8. (CCINP 21) On note E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $< f,g >= \int_0^1 f(t)g(t)t^2 \,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Vérifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x \,\mathrm{d}x$.
3. Calculer le projeté orthogonal de $x \mapsto x\ln x$ sur le sev des fonctions affines de E. Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at+b-t\ln t)^2 t^2 \,\mathrm{d}t$

Exercice 9. (CCINP 21) Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (at^2+bt+c-\cos t)^2 \,\mathrm{d}t$.

Exercice 10. (CCINP 21) Soit E un ev euclidien et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une b.o.n de E. Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E tels que : $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$.

1. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ des réels. Montrer que $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$
2. En déduire que $(e_i+u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E.

Exercice 11. (Mines-Ponts 21) Polynômes de l'Hermite.
Soit $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$. On admet qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale vaut $\sqrt{\pi}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme H_n tq : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi(x)$. Préciser degré et coeff dominant.
2. Montrer que $< P,Q > \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], < P, H_n >=< P', H_{n-1} >$. En déduire que la famille $(H_n)_n$ est orthogonale. Calculer $\|H_n\|^2$ pour tout n.
4. Soient $x,t \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{t^n H_n(x)}{n!}$

Exercice 12. (Mines-Ponts 21) Supplémentaire orthogonal
Soit F un espace préhilbertien réel et F un sev de E.

1. Montrer que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.
2. Dans le cas où $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $< P,Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et $F = \{P \in E / P(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp$.
3. A quelle condition a-t-on $F = \left(F^\perp\right)^\perp$?