PSI **Mars 2024**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Espaces Préhilbertiens réels et Espaces euclidiens

Exercice 1. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ et étudier le cas de l'égalité.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'ensemble $\left\{\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} \frac{x_i}{x_j} / (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n\right\}$ admet une borne inférieure m que l'on déterminera.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit la droite (D) d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.
1. Donner une b.o.n de D.
2. Déterminer une b.o.n de $D^\perp$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal p sur la droite (D).

Exercice 4. Partie du sujet e3A 2020 PC.
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $< P, Q >= P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance du polynôme $X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$:
   (a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E : Quelle est sa dimension ?
   (b) Soit φ la projection orthogonale sur H : Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de E

Exercice 5. On munit $C([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$.
Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, on note $P_i : x \longmapsto x^i$ et $F = \text{vect}(P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) n'est pas une b.o.n de F.
2. Déterminer une b.o.n de F.
3. Donner $F^\perp$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.

Exercice 6. (Mines Ponts) Soit E un espace préhilbertien réel et $B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E.

On suppose que : $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |< e_k, x >|^2$.

Montrer que B est une base orthonormale de E.

Exercice 7. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $<,>: E^2 \to \mathbb{R}, (A,B) \longmapsto tr({}^tAB)$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}\,(AM) = 0$. En utilisant le produit scalaire usuel de E, justifier rapidement que $A = 0$.

2. Déterminer l'orthogonal de G le sous-espace $\mathrm{vect}(I_n)$.
3. Déterminer la projection orthogonal de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur G et $G^\perp$.
4. Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr} A \leq \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}^t AA}$ et étudier le cas de l'égalité.
5. Soit $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ les ensembles respectifs des matrices symétriques puis antisymétriques.
   (a) Vérifier que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
   (b) Exprimer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ à $S_3(\mathbb{R})$.
   (c) Soit H l'espace des matrices de trace nulle. Montrer que H est un sev de E et donner sa dimension. Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1

Exercice 8. Déterminer $\lambda = \underset{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}{\mathrm{Inf}} \displaystyle\int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x}\, dx$

Exercice 9. 1. Enoncé et démontrer le théorème de représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.

2. Applications :
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = P(0)$$
   Montrer que Q est de degré n.
   (b) Montrer que pour toute forme linéaire f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \mathrm{tr}\,(AM)$. En déduire que tout noyau d'une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

Exercice 10. Partie d'un sujet CCINP 2010 PSI
Dans cette partie, on considère $n+1$ nombres réels, deux à deux distincts, notés $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et on définit la forme bilinéaire B sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par
$$\forall f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ B(f, g) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)$$
Pour $k \in [|0, n|]$, on définit $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ par $L_k(X) = \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$.

I.1. Définition d'une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1.1. Justifier rapidement l'affirmation : B définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ mais pas sur $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.2. Pour $j, k \in [|0, n|]$, calculer $L_k(x_j)$. Montrer que la famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire B.

I.2. Définition de $P_n(f)$.

A toute fonction $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on associe le polynôme $P_n(f)$ défini par
$$P_n(f) = \sum_{i=0}^{n} B(f, L_i)L_i$$

2.1. Pour tout $k \in [|0, n|]$, exprimer $B(f, L_k)$ en fonction de $f(x_k)$. En déduire que $P_n(f)$ vérifie $P_n(f)(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in [|0, n|]$.

2.2. Montrer que $P_n(f)$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in [|0, n|]$.

2.3. Expliciter $P_n(f)$ lorsque $f \in \mathbb{R}_n[X]$. Préciser le polynôme $\sum_{k=0}^{n} L_k(X)$ et, pour x réel, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} L_k(x)$.

Pour $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dira que $P_n(f)$ est le polynôme d'interpolation, de degré inférieur ou égal à n, de la fonction f aux points x_i, pour $i \in [|0, n|]$.

Exercice 11. Partie d'un sujet Centrale 2021 PC

Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G_n = \Big((X^{i-1}|X^{j-1})\Big)_{1\leq i,j\leq n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \cdots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \cdots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \cdots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}.$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de G_n à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

Définition et propriétés d'un système orthogonal :

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

— *$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$;*

— *pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire et de degré n.*

1. Dans toute cette partie , on considère un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P < n$. Montrer que $(V_n|P) = 0$.
   (c) Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n$.
2. **Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$**
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit G'_n la matrice carrée de taille $n+1$ suivante :

$$G'_n = \Big((V_{i-1}|V_{j-1})\Big)_{1\leq i,j\leq n+1} = \begin{pmatrix} (V_0|V_0) & (V_0|V_1) & \cdots & (V_0|V_n) \\ (V_1|V_0) & (V_1|V_1) & \cdots & (V_1|V_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (V_n|V_0) & (V_n|V_1) & \cdots & (V_n|V_n) \end{pmatrix}.$$

   On note $Q_n = (q_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$ la matrice de la famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que Q_n est triangulaire supérieure et que $\det Q_n = 1$.
   (b) Montrer que $Q_n^T G_n Q_n = G'_n$, où Q_n^T est la transposée de la matrice Q_n.
   (c) En déduire que $\det G_n = \prod_{i=0}^{n} \|V_i\|^2$.