Applications Linéaires

Keven Commault

Lycée Brizeux

25 avril 2021

$u : E \to F$ est une **application linéaire** de E dans F si u respecte les combinaisons linéaires, autrement dit si :

a) L'application nulle $n \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array} \right.$

a) L'application nulle n : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

b) La dérivation des polynômes : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$.

a) L'application nulle n : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

b) La dérivation des polynômes : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$.

c) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[0;1]} f \end{array}\right.$.

a) L'application nulle n : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

b) La dérivation des polynômes : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$.

c) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[0;1]} f \end{array}\right.$.

d) ϕ : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (-x+2y,0,y) \end{array}\right.$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

i. $u(\vec{0}_E) =$ et ii. $\forall \vec{x} \in E,\ u(-\vec{x}) =$

Démonstration

$u(\vec{0}_E) =$

$\forall \vec{x} \in E,\ u(-\vec{x}) =$

CPGE Brizeux Quimper

Vocabulaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Lorsque $F = E$, on dit que u est un
- Lorsque u est bijective, on dit que u est un
- Un endomorphisme qui est un isomorphisme est un
- L'ensemble des automorphismes de E est appelé **groupe linéaire** de E et noté $GL(E)$.

Remarque :

CPGE Brizeux Quimper

Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

b) L'**identité** $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array} \right.$ est un automorphisme de E.

Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

b) L'**identité** $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array} \right.$ est un automorphisme de E.

Exercice : $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right. \in GL(\mathbb{R}^2)$.

Composition d'applications linéaires :

Combinaison linéaire d'applications linéaires :

Proposition

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijectif alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

De plus, $u \circ u^{-1} =$ et $u^{-1} \circ u =$.

Démonstration

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

i. L'**image directe** d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F :

ii. L'**image réciproque** d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de F :

Démonstration

CPGE Brizeux Quimper

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de u est $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{x} \in E / \; u(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$.
- L'**image** de u est $\mathrm{Im}(u) = \{u(\vec{x}), \, \vec{x} \in E\}$.

Proposition

$\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de

$\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de .

Exemple

Déterminer le noyau et l'image de $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

À quoi cela sert-il ?

À quoi cela sert-il ? à créer plein de SEV !

À quoi cela sert-il ? à créer plein de SEV !

Exemple :
$\Gamma = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / y'' + 2y' + y = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car

Proposition

- u est injective ssi : $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$; ← injectivité se détermine en calculant le noyau
- u est surjective ssi : $\mathrm{Im}(u) = F$.

Proposition

- u est injective ssi : $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$;
- u est surjective ssi : $\mathrm{Im}(u) = F$.

Démonstration

- Le second point est évident car
- Supposons que u soit injective, alors

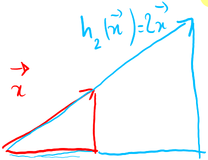
Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$

On va généraliser les transformations géométriques usuelles.

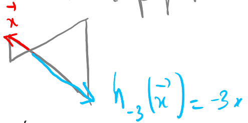
Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'homothétie de rapport λ est $h_\lambda : \begin{cases} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \lambda\vec{x}. \end{cases}$.



(homothéties : Thalès)
rapport > 0 : figure classique
< 0 : papillon



Remarque : si $\lambda \in \{0; 1\}$

- $\underline{\lambda = 0}$ $\forall \vec{x}$, $\vec{x} \longmapsto 0.\vec{x} = \vec{0}$ Application nulle
- $\underline{\lambda = 1}$ $\forall \vec{x}$, $\vec{x} \longmapsto \vec{x}$ Application identité Id_E) isomorphisme

Proposition
Les homothéties sont les seuls endomorphismes tels que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée pour tout $\vec{x} \in E$.

Si u est une homothétie alors $\forall \vec{x}$, $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée : évident

"Réciproque" à démontrer : en TD

Proposition

Les homothéties sont les seuls endomorphismes tels que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée pour tout $\vec{x} \in E$.

(sera vu en TD)

Définition

Soit F et G deux SEV tels que $E = F \oplus G$:

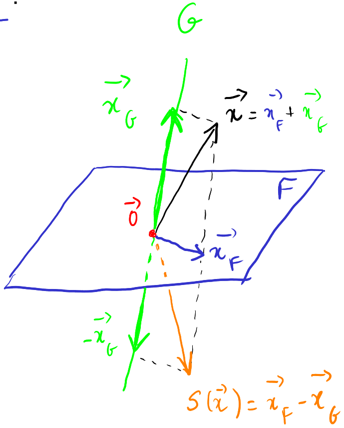
$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G \quad (\text{unique})$$

- La **projection sur** F **parallèlement à** G est l'application linéaire :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x}_F \end{array} \right. .$$

- La **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G est l'application linéaire :

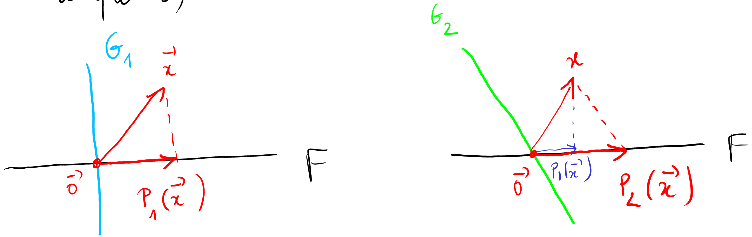
$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{array} \right. .$$



F et G qui sont les **éléments caractéristiques**, il faut les préciser <u>tous les deux</u>.

Par exemple dans le plan, si on projette sur une droite vectorielle sans préciser parallèlement à quel supplémentaire.

poly : remarque b)



P_i : proj sur F parallèlement à G_i

⚠ IL FAUT préciser les éléments caractéristiques

E et F qui sont les **éléments caractéristiques**, il faut les préciser tous les deux.

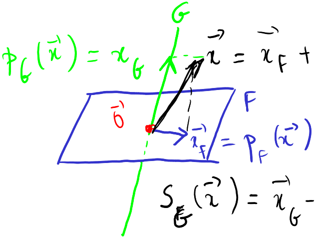
Par exemple dans le plan, si on projette sur une droite vectorielle sans préciser parallèlement à quel supplémentaire.

Proposition

$E = F \oplus G$, soit p_F la projection sur F parallèlement à G. Alors :

i. la projection sur G parallèlement à F est $p_g =$ $Id - p_F$;

ii. la symétrie par rapport à ~~F~~ G parallèlement à ~~G~~ F est : $s_G = p_G - p_F$
$= Id - 2p_F$



$\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G \iff \vec{x} = p_F(\vec{x}) + p_G(\vec{x})$

$\iff \boxed{p_G(\vec{x}) = \vec{x} - p_F(\vec{x})}$

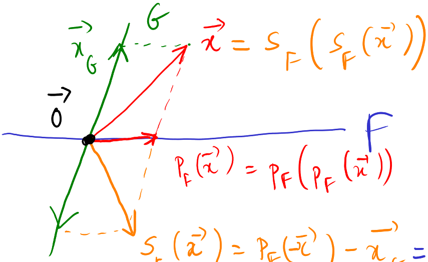
$s_G(\vec{x}) = \vec{x}_G - \vec{x}_F = (p_G - p_F)(\vec{x})$

Question : comment reconnaître parmi les applications linéaires les projecteurs et les symétries ? Quels sont les éléments caractéristiques ?

Proposition

i. u est un projecteur ssi $u \circ u = u$.
On a alors $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et u est la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$.

ii. u est une symétrie ssi $u \circ u = \mathrm{Id}$.
On a alors $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$ et u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.



$\vec{x} = s_F(s_F(\vec{x}))$

$p_F(\vec{x}) = p_F(p_F(\vec{x}))$

$s_F(\vec{x}) = p_F(\vec{x}) - \vec{x}_G = p_F(\vec{x}) + (-\vec{x}_G)$

$\ker(p_F) = G$
$\mathrm{Im}(p_F) = F$
$E = \ker(p_F) \oplus \mathrm{Im}(p_F)$

Démonstration du i. par double implication

si u est la proj sur F para. à G

$\Longrightarrow$: évident, on vient de le voir. $\ker(u) = G$ et $\mathrm{Im}(u) = F$

$\Longleftarrow$: supposons que $u \circ u = u$. (avec $u \in \mathcal{L}(E)$)

$\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} = \boxed{\underbrace{\vec{x} - u(\vec{x})}_{\in \mathrm{Ker}(u)}} + \boxed{\underbrace{u(\vec{x})}_{\in \mathrm{Im}(u)}}$: $(\star)$ montre que

$E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$

Il reste à voir que la somme est directe

càd $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\}$.

Soit $\vec{x} \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$

$\vec{x} \in \mathrm{Im}(u)$: $\exists\, \vec{y} \in E \,/\, \vec{x} = u(\vec{y})$

$\vec{x} \in \ker(u)$: $u(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \underbrace{u(u(\vec{y}))}_{u \circ u(\vec{y})} = \vec{0} \Longleftrightarrow u(\vec{y}) = \vec{0}$

Finalement $\vec{x} = \vec{0}$.

Vu : Fonctions = Paires $\oplus$ Impaires

Exemple $\phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P(X) \longmapsto P(-X) \end{cases}$

$\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ et $\forall P(X) \in \mathbb{K}[X]$, ϕ est une symétrie

$\phi(\phi(P(X))) = \phi(P(-X)) = P(X)$: $\phi \circ \phi = Id$,

éléments caractéristiques ? $\forall P(X) \in \mathbb{K}[X]$,

$P \in \ker(\phi - Id) \iff P(-X) - P(X) = 0 \iff P(-X) = P(X) \iff P$ est pair

$\iff P$ ne comporte que des monômes de deg pair

$P \in \ker(\phi + Id) \iff P(-X) = -P(X) \iff P$ est impair

ϕ est la symétrie par rapport à $\underbrace{Vect(X^{2i}, i \in \mathbb{N})}_{\text{Espace des pol pairs}}$ parallèlement à $Vect(X^{2i+1}, i \in \mathbb{N})$

(Rq : comb. lin. finies)

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F et G des SEV supplémentaires.
On connaît u lorsqu'on connait ses restrictions à F et à G.

Exemple

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
u est déterminée de façon unique par les images des éléments d'une base quelconque de E.

Démonstration

Exemples

a) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tq $\phi(1,0) = (2,1)$ et $\phi(0,1) = (-1,3)$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x,y) =$

b) $S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x \end{array} \right.$.
Calculons les images de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par S :

$$S(1) = \qquad S(X) \qquad S(X^2) =$$

Donc $S(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) =$

Par exemple $S(3 + X - 5X^2) =$

Exercice : dans l'espace muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on définit une application linéaire f en posant :

$$f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k} \quad ; \quad f(\vec{j}) = -4\vec{i} - 7\vec{j} + 10\vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Démontrer que f est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, dont $(\vec{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base ; soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (qui peut être de dimension finie ou pas) et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

i. u est injective ssi $(u(\vec{e_i}))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de F ;

ii. u est surjective ssi $(u(\vec{e_i}))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de F ;

iii. u est bijective ssi $(u(\vec{e_i}))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de F.

Démonstration On revient aux définitions :

i. u est injective si, et seulement si,

ii. u est surjective si, et seulement si,

iii. est une conséquence de i. et ii. car u est bijective si, et seulement si,

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E et F sont de même dimension finie.

$$u \text{ est bijective} \iff u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective}$$

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E et F sont de même dimension finie.

$$u \text{ est bijective} \iff u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective}$$

Exemple

$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Définition

On dit que E et F sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

Définition

On dit que E et F sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

Proposition

En dimension finie, E et F isomorphes ssi ils ont même dimension.

Définition

On dit que E et F sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

Proposition

En dimension finie, E et F isomorphes ssi ils ont même dimension.

Démonstration

Supposons que E et F soient de même dimension finie n.

Réciproquement, supposons que E et F sont isomorphes. Alors,

Définition
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.
On appelle **rang de** u
On le note

Exemples

a) La dérivation $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}[X]$
b) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la trace

c) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la transposition

Proposition
Composer (à gauche ou à droite) par un isomorphisme

Proposition
En dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

$$\mathrm{rg}(v \circ u)$$

Théorème du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie.

Théorème du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie.

Démonstration

Soit $n = \dim E$. De deux choses l'une :

- Soit $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}\}$ et alors
- Sinon, soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
  On peut alors compléter cette base en une base de E :

Définition

Une équation **linéaire** est de la forme (Eq) : $u(\vec{x}) = \vec{b}$

Exemples

a) Le système linéaire $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 2 \end{cases}$

b) De façon générale,

c) L'équation différentielle $y' - 3y = \cos x$

d) De façon générale,

Proposition

Soit $\vec{y}$ est une solution particulière de l'équation linéaire $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$.
$\vec{x}$ est solution de (Eq) ssi

Démonstration Dire que $\vec{y}$ est une solution particulière de l'équation linéaire (Eq) c'est dire que :
Pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\begin{aligned}
\vec{x} \text{ est solution de } (Eq) &\iff \\
&\iff \\
&\iff \\
&\iff \\
&\iff
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$ est donc

Remarque ce type d'ensemble (appelé *espace affine*) n'est pas un espace vectoriel sauf quand

Proposition
Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
L'ensemble des suites u vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration
L'ensemble S cherché est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
L'application $\left\{ \begin{array}{l} S \to \mathbb{K}^2 \\ u \mapsto (u_0, u_1) \end{array} \right.$ est linéaire. Elle est injective et surjective, c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit $\dim S = \dim \mathbb{K}^2 = 2$ et S est bien un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.