# Applications Linéaires

Keven Commault

Lycée Brizeux

25 avril 2021

$u : E \to F$ est une **application linéaire** de $E$ dans $F$ si $u$ respecte les combinaisons linéaires, autrement dit si :

a) L'application nulle $n \ : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array} \right.$

a) L'application nulle $n$ : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

b) La dérivation des polynômes : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$ .

a) L'application nulle $n$ : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

b) La dérivation des polynômes : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$.

c) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[0;1]} f \end{array}\right.$.

a) L'application nulle $n$ : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

b) La dérivation des polynômes : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$.

c) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[0;1]} f \end{array}\right.$.

d) $\phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (-x+2y, 0, y) \end{array}\right.$.

### Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

i. $u(\vec{0}_E) =$ et ii. $\forall \vec{x} \in E,\ u(-\vec{x}) =$

### Démonstration

$u(\vec{0}_E) =$

$\forall \vec{x} \in E,\ u(-\vec{x}) =$

**Vocabulaire**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Lorsque $F = E$, on dit que $u$ est un
- Lorsque $u$ est bijective, on dit que $u$ est un
- Un endomorphisme qui est un isomorphisme est un
- L'ensemble des automorphismes de $E$ est appelé **groupe linéaire** de $E$ et noté $GL(E)$.

**Remarque :**

## Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

## Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

b) L'**identité** $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array} \right.$ est un automorphisme de $E$.

## Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

b) L'**identité** $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array} \right.$ est un automorphisme de $E$.

**Exercice :** $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right. \in GL(\mathbb{R}^2)$.

## Composition d'applications linéaires :

## Combinaison linéaire d'applications linéaires :

## Proposition

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijectif alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

De plus, $u \circ u^{-1} =$ et $u^{-1} \circ u =$ .

## Démonstration

### Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

i. L'**image directe** d'un sous-espace vectoriel de $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$ :

ii. L'**image réciproque** d'un sous-espace vectoriel de $F$ est un sous-espace vectoriel de $F$ :

### Démonstration

### Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de $u$ est $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{x} \in E / \ u(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$.
- L'**image** de $u$ est $\mathrm{Im}(u) = \{u(\vec{x}), \vec{x} \in E\}$.

### Proposition

$\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de

$\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de .

## Exemple

Déterminer le noyau et l'image de $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

# À quoi cela sert-il ?

**À quoi cela sert-il ?** à créer plein de SEV !

**À quoi cela sert-il ?** à créer plein de SEV !

Exemple :
$\Gamma = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / y'' + 2y' + y = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car

## Proposition

- $u$ est injective ssi : $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$ ;
- $u$ est surjective ssi : $\mathrm{Im}(u) = F$.

## Proposition

- $u$ est injective ssi : $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$ ;
- $u$ est surjective ssi : $\mathrm{Im}(u) = F$.

## Démonstration

- Le second point est évident car
- Supposons que $u$ soit injective, alors

Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$

## Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

**L'homothétie** de rapport $\lambda$ est $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \lambda\vec{x}. \end{array} \right.$ .

**Remarque** : si $\lambda \in \{0; 1\}$

**Proposition**

Les homothéties sont les seuls endomorphismes tels que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée pour tout $\vec{x} \in E$.

**Proposition**

Les homothéties sont les seuls endomorphismes tels que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée pour tout $\vec{x} \in E$.

(sera vu en TD)

### Définition

Soit $F$ et $G$ deux SEV tels que $E = F \oplus G$ :

$$\forall \vec{x} \in E,$$

- La **projection sur** $F$ **parallèlement à** $G$ est l'application linéaire :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \end{array} \right. .$$

- La **symétrie par rapport à** $F$ **parallèlement à** $G$ est l'application linéaire :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \end{array} \right. .$$

$E$ et $F$ qui sont les **éléments caractéristiques**, il faut les préciser tous les deux.

Par exemple dans le plan, si on projette sur une droite vectorielle sans préciser parallèlement à quel supplémentaire.

$E$ et $F$ qui sont les **éléments caractéristiques**, il faut les préciser tous les deux.

Par exemple dans le plan, si on projette sur une droite vectorielle sans préciser parallèlement à quel supplémentaire.

**Proposition**

$E = F \oplus G$, soit $p_F$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$. Alors :

i. la projection sur $G$ parallèlement à $F$ est $p_g =$ ;

ii. la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ est :

## Proposition

i. $u$ est un projecteur ssi $u \circ u = u$.
On a alors $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et $u$ est la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$.

ii. $u$ est une symétrie ssi $u \circ u = \mathrm{Id}$.
On a alors $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$ et $u$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.

## Démonstration du i. par double implication

$\Longrightarrow$ :

$\Longleftarrow$ : supposons que $u \circ u = u$.

$$\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} = \underbrace{\qquad\qquad}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{\qquad\qquad}_{\in \mathrm{Im}(u)} \ : (\star)$$

Il reste

# Exemple

sert à exprimer les vecteurs en faisant des CL de la base

(erreur : u, linéaire, définie sur E pas forcément à valeurs dans E)

## Proposition

$E = F \oplus G \iff \forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ (décomposition unique)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $F$ et $G$ des SEV supplémentaires.
On connaît $u$ lorsqu'on connait ses restrictions à $F$ et à $G$.

$$\boxed{f(\vec{x}) = f(\vec{x}_F + \vec{x}_G) = f(\vec{x}_F) + f(\vec{x}_G)}$$

## Exemple

$E = F \oplus G$ : on prend

$u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \underline{a+b} \in \mathbb{R}$

$u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

$u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 3c - 4d$

$u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a+b+3c-4d$ ✓

$E = \underbrace{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}_{\text{dim } 4}$, $F = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12})$ : dim 2

$G = \mathrm{Vect}(E_{21}, E_{22})$ : dim 2

$F \cap G = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ : la somme est directe

somme directe, dimensions OK $\}$ : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$

Rq : "trou" dans la démonstration

elle ne convient qu'en dim finie. En dim $\infty$, on prend des CL dont seul un nb fini de coeff est $\neq 0$.

cf $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$

## Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
$u$ est déterminée de façon unique par les images des éléments d'une base quelconque de $E$.

## Démonstration

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $E$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Supposons qu'on connaisse $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2) \dots, u(\vec{e}_n)$

Soit $\vec{x} \in E$, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ $(\forall i, \underbrace{x_i \in \mathbb{K}}_{\text{connus}})$

$u(\vec{x}) = u( \qquad )$

$= x_1 u(\vec{e}_1) + x_2 u(\vec{e}_2) + \dots + x_n u(\vec{e}_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(\vec{e}_i)$ ✓

Donc on connait $u(\vec{x})$.

CPGE Brizeux Quimper

## Exemples

Bilan : $\phi : (x,y) \longmapsto (2x-y\ ,\ x+3y)$

a) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tq $\phi(1,0) = \boxed{(2,1)}$ et $\phi(0,1) = \boxed{(-1,3)}$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x,y) = \phi(x(1,0)+y(0,1)) = x\,\boxed{\phi(1,0)} + y\,\boxed{\phi(0,1)}$
$= x\,\boxed{(2,1)} + y(-1,3) = (2x-y, x+3y)$

b) $S : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x \end{cases}$.
Calculons les images de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par $S$ :

$S(1) = 1 \qquad S(X) = \frac{1}{2} \qquad S(X^2) = \frac{1}{3}$

Donc $S(\underbrace{a_0\cancel{1} + a_1\cancel{X} + a_2\cancel{X^2}}_{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ quelconque}}) = a_0 S(1) + a_1 S(X) + a_2 S(X^2) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2$

Par exemple $S(\underbrace{3 + X - 5X^2}) = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(-5) = \frac{18+3-10}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$

$a_0 = 3,\quad a_1 = 1,\quad a_2 = -5$

**Exercice** : dans l'espace muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on définit une application linéaire $f$ en posant :

$$f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k} \quad ; \quad f(\vec{j}) = -4\vec{i} - 7\vec{j} + 10\vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Démontrer que $f$ est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

**Proposition**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, dont $(\vec{e}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base ; soit $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (qui peut être de dimension finie ou pas) et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

i. $u$ est injective ssi $(u(\vec{e}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de $F$ ;
ii. $u$ est surjective ssi $(u(\vec{e}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de $F$ ;
iii. $u$ est bijective ssi $(u(\vec{e}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $F$.

**Démonstration** On revient aux définitions :

i. $u$ est injective si, et seulement si,

ii. $u$ est surjective si, et seulement si,

iii. est une conséquence de i. et ii. car $u$ est bijective si, et seulement si,

## Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $E$ et $F$ sont de même dimension finie.

$$u \text{ est bijective} \iff u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective}$$

## Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $E$ et $F$ sont de même dimension finie.

$$u \text{ est bijective} \iff u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective}$$

## Exemple

$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

**Définition**

On dit que $E$ et $F$ sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

### Définition

On dit que $E$ et $F$ sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

### Proposition

En dimension finie, $E$ et $F$ isomorphes ssi ils ont même dimension.

**Définition**

On dit que $E$ et $F$ sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

**Proposition**

En dimension finie, $E$ et $F$ isomorphes ssi ils ont même dimension.

**Démonstration**

Supposons que $E$ et $F$ soient de même dimension finie $n$.

Réciproquement, supposons que $E$ et $F$ sont isomorphes. Alors,

**Définition**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $E$ de dimension finie.
On appelle **rang de** $u$
On le note

**Exemples**

a) La dérivation $\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}[X]$
b) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la trace

c) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la transposition

CPGE Brizeux Quimper

**Proposition**

Composer (à gauche ou à droite) par un isomorphisme

**Proposition**

En dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

$$\mathrm{rg}(v \circ u)$$

**Théorème du rang**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $E$ est de dimension finie.

**Théorème du rang**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $E$ est de dimension finie.

**Démonstration**

Soit $n = \dim E$. De deux choses l'une :

- Soit $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}\}$ et alors
- Sinon, soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
  On peut alors compléter cette base en une base de $E$ :

## Définition

Une équation **linéaire** est de la forme $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$

## Exemples

a) Le système linéaire $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 2 \end{cases}$

b) De façon générale,

c) L'équation différentielle $y' - 3y = \cos x$

d) De façon générale,

**Proposition**

Soit $\vec{y}$ est une solution particulière de l'équation linéaire $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$.
$\vec{x}$ est solution de $(Eq)$ ssi

**Démonstration** Dire que $\vec{y}$ est une solution particulière de l'équation linéaire $(Eq)$ c'est dire que :
Pour tout $\vec{x} \in E$ :

$$\vec{x} \text{ est solution de } (Eq) \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

CPGE Brizeux Quimper

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$ est donc

**Remarque** ce type d'ensemble (appelé *espace affine*) n'est pas un espace vectoriel sauf quand

**Proposition**

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
L'ensemble des suites $u$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

**Démonstration**

L'ensemble $S$ cherché est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
L'application $\left\{ \begin{array}{l} S \to \mathbb{K}^2 \\ u \mapsto (u_0, u_1) \end{array} \right.$ est linéaire. Elle est injective et surjective, c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit $\dim S = \dim \mathbb{K}^2 = 2$ et $S$ est bien un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

CPGE Brizeux Quimper