Applications Linéaires

Keven Commault

Lycée Brizeux

25 avril 2021

$u : E \to F$ est une **application linéaire** de E dans F si u respecte les combinaisons linéaires, autrement dit si :

a) L'application nulle $n\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

a) L'application nulle n : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

b) La dérivation des polynômes : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$.

a) L'application nulle n : $\begin{cases} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{cases}$

b) La dérivation des polynômes : $\begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{cases}$.

c) $\begin{cases} \mathcal{C}^0([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[0;1]} f \end{cases}$.

a) L'application nulle n : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array}\right.$

b) La dérivation des polynômes : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}\right.$.

c) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[0;1]} f \end{array}\right.$.

d) $\phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (-x+2y, 0, y) \end{array}\right.$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

i. $u(\vec{0}_E) =$ et ii. $\forall \vec{x} \in E,\ u(-\vec{x}) =$

Démonstration

$u(\vec{0}_E) =$

$\forall \vec{x} \in E,\ u(-\vec{x}) =$

CPGE Brizeux Quimper

Vocabulaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Lorsque $F = E$, on dit que u est un
- Lorsque u est bijective, on dit que u est un
- Un endomorphisme qui est un isomorphisme est un
- L'ensemble des automorphismes de E est appelé **groupe linéaire** de E et noté $GL(E)$.

Remarque :

Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$
mais n'en n'est pas un automorphisme car :

b) L'**identité** $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array} \right.$ est un automorphisme de E.

Exemples

a) $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ mais n'en n'est pas un automorphisme car :

b) L'**identité** $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array} \right.$ est un automorphisme de E.

Exercice : $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array} \right. \in GL(\mathbb{R}^2)$.

Composition d'applications linéaires :

Combinaison linéaire d'applications linéaires :

Proposition

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijectif alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

De plus, $u \circ u^{-1} =$ et $u^{-1} \circ u =$.

Démonstration

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

i. L'**image directe** d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F :

ii. L'**image réciproque** d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de F :

Démonstration

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de u est $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{x} \in E / \ u(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$.
- L'**image** de u est $\mathrm{Im}(u) = \{u(\vec{x}), \ \vec{x} \in E\}$.

Proposition

$\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de

$\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de .

Exemple

Déterminer le noyau et l'image de $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

À quoi cela sert-il ?

À quoi cela sert-il ? à créer plein de SEV !

À quoi cela sert-il ? à créer plein de SEV !

Exemple :
$\Gamma = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / y'' + 2y' + y = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car

Proposition

- u est injective ssi : $\operatorname{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$;
- u est surjective ssi : $\operatorname{Im}(u) = F$.

Proposition

- u est injective ssi : $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$;
- u est surjective ssi : $\mathrm{Im}(u) = F$.

Démonstration

- Le second point est évident car
- Supposons que u soit injective, alors

  Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$

Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'homothétie de rapport λ est $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \lambda\vec{x}. \end{array} \right.$.

Remarque : si $\lambda \in \{0; 1\}$

Proposition

Les homothéties sont les seuls endomorphismes tels que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée pour tout $\vec{x} \in E$.

CPGE Brizeux Quimper

Proposition

Les homothéties sont les seuls endomorphismes tels que $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est liée pour tout $\vec{x} \in E$.

(sera vu en TD)

Définition

Soit F et G deux SEV tels que $E = F \oplus G$:

$$\forall \vec{x} \in E,$$

- La **projection sur** F **parallèlement à** G est l'application linéaire :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \end{array} \right. .$$

- La **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G est l'application linéaire :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \end{array} \right. .$$

E et F qui sont les **éléments caractéristiques**, il faut les préciser tous les deux.

Par exemple dans le plan, si on projette sur une droite vectorielle sans préciser parallèlement à quel supplémentaire.

E et F qui sont les **éléments caractéristiques**, il faut les préciser tous les deux.

Par exemple dans le plan, si on projette sur une droite vectorielle sans préciser parallèlement à quel supplémentaire.

Proposition

$E = F \oplus G$, soit p_F la projection sur F parallèlement à G. Alors :

i. la projection sur G parallèlement à F est $p_g =$;

ii. la symétrie par rapport à F parallèlement à G est :

Proposition

i. u est un projecteur ssi $u \circ u = u$.
On a alors $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et u est la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$.

ii. u est une symétrie ssi $u \circ u = \mathrm{Id}$.
On a alors $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$ et u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.

Démonstration du i. par double implication

$\Longrightarrow$:

$\Longleftarrow$: supposons que $u \circ u = u$.

$$\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} = \underbrace{\qquad\qquad}_{\in \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{\qquad\qquad}_{\in \mathrm{Im}(u)} \ : (\star)$$

Il reste

Exemple

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F et G des SEV supplémentaires.
On connaît u lorsqu'on connait ses restrictions à F et à G.

Exemple

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
u est déterminée de façon unique par les images des éléments d'une base quelconque de E.

Démonstration

Exemples

a) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tq $\phi(1,0) = (2,1)$ et $\phi(0,1) = (-1,3)$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x,y) =$

b) $S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x \end{array} \right.$.
Calculons les images de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par S :

$S(1) =$ $\qquad$ $S(X)$ $\qquad$ $S(X^2) =$

Donc $S(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) =$

Par exemple $S(3 + X - 5X^2) =$

Exercice : dans l'espace muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on définit une application linéaire f en posant :

$$f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k} \quad ; \quad f(\vec{j}) = -4\vec{i} - 7\vec{j} + 10\vec{k} \quad \text{et} \quad f(\vec{k}) = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}.$$

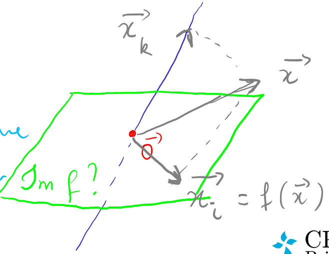
Démontrer que f est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

f est une projection : ✓ $\qquad \ker f = \mathrm{Vect}((-2,-4,5))$ ✓

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})}_{}\big)$$

famille génératrice mais pas libre
car on sait que $\mathrm{Im}(f)$ est un plan

→ en extraire une base ?



application linéaire bijective

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, dont $(\vec{e}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base ; soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (qui peut être de dimension finie ou pas) et soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

i. u est injective ssi $(u(\vec{e}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de F ;

ii. u est surjective ssi $(u(\vec{e}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de F ;

iii. u est bijective ssi $(u(\vec{e}_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de F.

bon nb de vect

isomorphismes "$\Leftrightarrow$" applications linéaires qui envoient les bases de E sur les bases de F.

$u \in \mathcal{L}(E,F)$, $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$: base de E

$(u(\vec{e_1}), \dots, u(\vec{e_n}))$ famille dans F

Démonstration On revient aux définitions :

i. u est injective si, et seulement si, $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $u(\vec{x}) = u(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

$\Leftarrow$: supp $(u(\vec{e_i}))_i$ est libre, mq u est injective.

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$ / $u(\vec{x}) = u(\vec{y})$. Dans la base : $x = \sum x_i \vec{e_i}$, $y = \sum y_i \vec{e_i}$

$u(\vec{x}) = u(\vec{y}) \Leftrightarrow u(\sum x_i \vec{e_i}) = u(\sum y_i \vec{e_i}) \Leftrightarrow \sum x_i u(\vec{e_i}) = \sum y_i u(\vec{e_i})$

ii. u est surjective si, et seulement si, $\forall \vec{y} \in F, \exists \vec{x} \in E / \vec{y} = u(\vec{x})$

$\Longleftrightarrow \forall \vec{y} \in F, \exists (x_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}^n / \vec{y} = u(\sum x_i \vec{e_i})$

$\Longleftrightarrow$ " " " " " $/ \vec{y} = \sum x_i u(\vec{e_i}) \Leftrightarrow (u(\vec{e_i}))$ est génératrice de F

iii. est une conséquence de i. et ii. car u est bijective si, et seulement si, u est surj et inj

$\Leftrightarrow (u(\vec{e_i}))$ est génératrice et libre

$\Leftrightarrow$ ———— une base de F

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E et F sont de même dimension finie.

$$u \text{ est bijective} \iff u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective}$$

Rappel : en dim n une famille est une base, 3 façons de procéder

- elle est libre et génératrice] n'utilise pas la dim
- elle est libre et a n vecteurs
- elle est génératrice et a n vecteurs

} dim permet de faire la moitié du travail

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E et F sont de même dimension finie.

$$u \text{ est bijective} \iff u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective}$$

Valables QUE pour les applications linéaires entre espaces de même dimension

Exemple

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \right.$$ est un isomorphisme.

$\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit de voir que ϕ est inj ou surj pour déduire que ϕ est un isomorphisme.

ϕ est inj $\iff \ker \phi = \{0\}$. Déterminons $\ker \phi$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $P \in \ker \phi$ càd $\phi(P) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (P(0), P(1), P(2)) = (0, 0, 0)$

P a au - 3 racines or $\deg P \leq 2$ donc $P = 0$. Finalement ϕ est inj donc bij.

Définition

On dit que E et F sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

Définition

On dit que E et F sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

Proposition

En dimension finie, E et F isomorphes ssi ils ont même dimension.

⚠ $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ est parfaitement déterminée par l'image d'une base de E.

Définition

On dit que E et F sont des EV **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme $u : E \to F$.

Proposition

$\Longrightarrow$ 2

En dimension finie, E et F isomorphes ssi ils ont même dimension.

$\Longleftarrow$ 1

Démonstration

Supposons que E et F soient de même dimension finie n.

$\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$; $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1 \dots \vec{f}_n)$

On définit $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ par $\forall i,\ \vec{e}_i \xmapsto{\phi} \vec{f}_i$ .. $\phi : \mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F$) ϕ est un isomorphisme

Réciproquement, supposons que E et F sont isomorphes. Alors,

il existe $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ qui est un isomorphisme

Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$ une base de E $\Longrightarrow (\phi(\vec{e}_1) \dots \phi(\vec{e}_n))$: base de F

$\Longrightarrow \dim F = n$

$\mathcal{B}_E = (\vec{e_1} \dots \vec{e_n})$,
$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\underbrace{u(\vec{e_1}), \dots, u(\vec{e_n})}_{\text{fam génératrice}})$: dim finie $\leqslant n$

Définition
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.
On appelle **rang de** u la dimension de $\mathrm{Im}(u)$
On le note $\mathrm{rg}(u)$.

$\boxed{\text{Rq : } F \text{ peut être de dim } \infty,\ \mathrm{Im}\,u \subset F \text{ est un SEV de dim finie.}}$

Exemples

a) La dérivation $\mathbb{R}_3[X] \xrightarrow{D} \mathbb{R}[X]$. $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathrm{rg}(D) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$

b) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la trace

$\mathrm{tr} : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto a_{11} + a_{22} \end{cases}$ (somme des élts diagonaux)

$\forall x \in \mathbb{R},\ x = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ donc $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = 1$

c) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la transposition

a pour rang 9 car $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $M = {}^t({}^tM)$ et donc
$\mathrm{Im}(\text{transposition}) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$\text{transp} \circ \text{transp} = \mathrm{Id}$: transp est une symétrie !

CPGE Brizeux Quimper

conserve les dimensions

Proposition

Composer (à gauche ou à droite) par un isomorphisme ne change pas le rang

$$\hat{E} \xrightarrow[\sim]{w} E \xrightarrow{u} F \xrightarrow[\text{iso}\ \sim]{v} \hat{F}$$

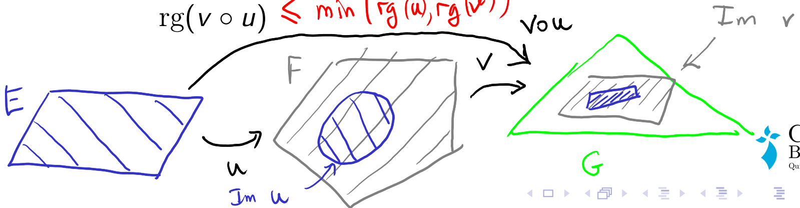
$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u \circ w)$$

Proposition

En dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$$



⚠ ultra utile dans les exercices !

Théorème du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie.

$$\dim E = \dim(\ker u) + \dim(\operatorname{Im} u)$$

càd $\boxed{\dim E = \dim(\ker u) + \operatorname{rg}(u)}$

(∗) $\lambda_{p+1} u(\vec{x}_{p+1}) + \dots \lambda_n u(\vec{x}_n) = \vec{0}_F$

$\iff u(\underbrace{\lambda_{p+1}\vec{x}_{p+1} + \dots \lambda_n \vec{x}_n}_{\in \ker u \text{ donc } \in \mathrm{Vect}(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_p) \text{ donc } = \vec{0}_E}) = \vec{0}_F$

$\Downarrow$

$\lambda_{p+1} = 0 = \dots = \lambda_n$

Théorème du rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie.

$$\dim E = \dim(\ker u) + \underbrace{\mathrm{rg}(u)}_{= \dim(\mathrm{Im}(u))}$$

Démonstration

Soit $n = \dim E$. De deux choses l'une :

- Soit $\mathrm{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\}$ et alors u est injective. Soit $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$
  la famille $(u(\vec{e}_i))_i$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ et donc $\mathrm{rg}(u) = n$.
  générateur toujours, libre : u est inj
  $\dim E = 0 + n$ ✓
- Sinon, soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
  On peut alors compléter cette base en une base de E :
  $(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1} \dots \vec{x}_n)$: base de E

$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\underbrace{u(\vec{x}_1)}_{=\vec{0}}, \dots \underbrace{u(\vec{x}_p)}_{=\vec{0}}, u(\vec{x}_{p+1}), \dots u(\vec{x}_n)) = \mathrm{Vect}(\underbrace{u(\vec{x}_{p+1}) \dots u(\vec{x}_n)}_{\text{libre ! } (∗)})$

$\mathrm{rg}(u) = n - p$: Th ok

Définition

Une équation **linéaire** est de la forme (Eq) : $u(\vec{x}) = \vec{b}$

- $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E, F des EV
- $\vec{x} \in E$: inconnue
- $\vec{b} \in F$: second membre

Exemples

a) Le système linéaire $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 2 \end{cases}$

avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $u(x,y,z) = (x-2y+z, 3x+y-4z)$

$\vec{x}(x,y,z)$ $\quad \vec{b} = (5,2)$

(Autre façon de voir $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{u} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} X$ $\quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$)

b) De façon générale, tout système linéaire est une éq. linéaire

c) L'équation différentielle $\underbrace{y' - 3y = \cos x}$

$$u(y) = \cos x$$

$$u : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty \\ y \longmapsto y' - 3y \end{cases}$$

inconnue   2nd membre

$\left(u = \frac{d}{dx} - 3\,\mathrm{Id}\right.$ c'est bien linéaire $\left.\right)$

d) De façon générale, toute équa diff. linéaire est une éq. linéaire

Proposition

Soit $\vec{y}$ est une solution particulière de l'équation linéaire $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$.
$\vec{x}$ est solution de (Eq) ssi $\vec{x} - \vec{y} \in \ker u$

Démonstration Dire que $\vec{y}$ est une solution particulière de l'équation linéaire (Eq) c'est dire que : $u(\vec{y}) = \vec{b}$
Pour tout $\vec{x} \in E$:

$$
\begin{aligned}
\vec{x} \text{ est solution de } (Eq) &\iff u(\vec{x}) = \vec{b} \\
&\iff u(\vec{x}) = u(\vec{y}) \\
&\iff u(\vec{x}) - u(\vec{y}) = \vec{0}_F \\
&\iff u(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}_F \\
&\iff \vec{x} - \vec{y} \in \ker u
\end{aligned}
$$

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $(Eq) : u(\vec{x}) = \vec{b}$ est donc

$$\left\{ \vec{y} + \vec{z} \;/\; \vec{z} \in \ker u \right\}$$

Remarque ce type d'ensemble (appelé *espace affine*) n'est pas un espace vectoriel sauf quand $\vec{y} = \vec{0}$ ce qui correspond à $\vec{b} = \vec{0}$

càd l'équation est homogène.

Pour les récurrences linéaires d'ordre 2

On a vu une formule qui fonctionne. Si on l'applique on obtient une solution

Réciproque ? Toutes les solutions sont-elles données par la formule ?

Proposition

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. crée un plan

L'ensemble des suites u vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration

L'ensemble S cherché est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

L'application $\begin{cases} S \to \mathbb{K}^2 \\ u \mapsto (u_0, u_1) \end{cases}$ est linéaire. Elle est injective et surjective, c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit $\dim S = \dim \mathbb{K}^2 = 2$ et S est bien un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Crée un isomorphisme $\underbrace{\text{Solutions}}_{\dim = 2} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$

CPGE Brizeux Quimper