Il existe (au moins) une application linéaire $E \to F$.

L'application $z \longmapsto |z|$ est une application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

$\Gamma = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(1) = P'(1)\}$ est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$.

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(v \circ u)$.

L'application $aX + b \longmapsto a + bX$ est une symétrie de $\mathbb{K}_1[X]$.

L'application $z \longmapsto \mathrm{Re}(z)$ est une projection de $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}_5[X]$ et $\mathbb{R}^5$ sont isomorphes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $u((1,0)) = (2,0)$ et $u((0,1)) = (0,3)$.
u est une homothétie.

u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $u((1,0)) = (2,0)$ et $u((0,1)) = (0,3)$. u est un automorphisme.

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & 3x - y \end{array} \right.$$

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array} \right.$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X) + 1 \end{array} \right.$$

$$f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \right.$$

$$f_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ aX^2 + bX + c & \mapsto & bX + c \end{array} \right.$$

$$f_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & |f| \end{array} \right.$$

1. Une base de $\mathrm{Im}(f)$?

2. Une base de $\mathrm{Ker}(f)$?

3. f est-elle injective ? surjective ?

- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_1[X]$:

- $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

- $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^5$:

- $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f(x) & \mapsto & f(2x) \end{array} \right.$$

$$w : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array} \right.$$

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x, 3y) \end{array} \right.$$

Soit u l'endomorphisme défini par
$u(\vec{a}) = -2\vec{a} + 2\vec{c}$; $u(\vec{b}) = 3\vec{b}$; $u(\vec{c}) = -4\vec{a} + 4\vec{c}$.

- 1) Base de $\mathrm{Ker}(u)$?

- u est-il injectif ? Peut-il être surjectif ?

- Rang de u ?
- Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.

- Mq $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$ dont le noyau est $\mathrm{Vect}(X+1, X^2+X-3)$.

Trouver toutes les applications linéaires de $\mathcal{L}(\mathbb{K}_3[X], \mathbb{K}^2)$ dont le noyau est $\mathrm{Vect}(X^2 - 3X)$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

3. Prourver que $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

Montrer que f est la *truc* par rapport à *bidule* parallèlement à *machin*.

- $\mathcal{S}_2$ et $\{P \in \mathbb{K}_3[X] / P(5) = 0\}$

- $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de f.

3. Que donne le théorème du rang ?

i

Prouver que $\mathrm{Ker}(v \circ u) = u^{-1}\left(\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)\right)$.

1. Pour $i \in [\![0; n]\!]$, déterminer le degré de $u(X^i)$.
2. En déduire le noyau et l'image de u.
3. Soit $Q \in \mathrm{Im}(u)$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 16 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \exists! Q \in \mathbb{K}_n[X]\ /\ P = \sum_{i=0}^{n} Q^{(i)}$.