# Indications

Somme de deux variables de Poisson indépendantes : Calculer $P(X+Y)=k$ pour $k$ entier. Utiliser un SCE et la formule des probabilités totales.

Fonction génératrice d'une somme de 2 v.a. indépendantes : Produit de Cauchy, SCE et formule des probabilités totales $\sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=n-i) = \sum_{i=0}^{n} P((X=i)et(Y=n-i))$ par indépendance, puis $P((X=i)et(Y=n-i)) = P((X+Y=n)et(X=i))$

Inégalité de Markov : Ordonner les valeurs prises par $X$ de manière croissante, séparer la somme en deux, dont l'une sur les valeurs prises par $X$ et plus grandes que $a$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Utiliser l'inégalité de Markov pour la v.a. réelle discrète positive $(X-E(X))^2$

Loi faible des grands nombres : Les variables étant 2 à 2 indpdt., la variance de leur somme est aisée à calculer. La moyenne de $\frac{S_n}{n}$ vaut $m$. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Exercice :**

Soient $X$ et $Y$ deux v.a. dans $\mathbb{R}^{+*}$ de même loi indépendantes. Montrer que $E(\frac{X}{Y}) \geq 1$.

# Démonstrations EVN

**Suites extraites**

1. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $E$ qui converge vers $l$. Alors toute suite extraite de $(u_n)$ converge vers $l$.
2. Si les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite $l$, alors $(u_n)_n$ converge vers $l$.

*Démonstration.* Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $E$.

1) On suppose que la suite $u$ converge vers $l$. Soit $v_n = u_{\phi(n)}$ une suite extraite de $u$. Alors $v$ converge également vers $l$.

On montre d'abord par récurrence (facile) que l'application $\phi$, strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ satisfait : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \phi(n) \geq n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0$ t.q. pour tout $n \geq n_0, ||u_n - l|| \leq \varepsilon$. Or $\phi(n) \geq n$, donc $\phi(n) \geq n_0$ et $||v_n - l|| = ||u_{\phi(n)} - l|| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que la suite $v$ converge vers $l$.

2) Supposons que les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite $l$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0$ et $n_1$ t.q. pour tout $n \geq n_0$, $||u_{2n} - l|| \geq \varepsilon$ et pour tout $m \geq n_1$, $||u_{2m+1} - l|| \geq \varepsilon$.

Posons $n_2 = 2\max(n_0, n_1) + 1$. Si $n \geq n_2$ est pair, on peut l'écrire $n = 2m$ avec $m \geq n_0$. Si $n \geq n_2$ est impair, on peut l'écrire $n = 2m+1$ avec $m \geq n_1$. Dans les deux cas, $||u_n - l|| \leq \varepsilon$. La suite $u$ converge donc vers $l$.

□

✱Convergence : prouver la convergence d'une suite de $E$ revient à prouver la convergence de ses suites coordonnées.

*Démonstration.* Soit $u$ une suite d'éléments de $E$ et $(u_n^k)_n$ ses suites coordonnées. On rappelle qu'on travaille dans $E$ supposé de dimension finie $p$, et que le choix de la norme n'influence pas la convergence d'une suite dans ce cadre.

1) Supposons que la suite $u$ convers vers $l \in E$ de coordonnées $(l_1, ..., l_p)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$, tel que , pour tout $n \geq n_0$, $||u_n - l||_\infty < \varepsilon$.

Soit $k$ quelconque, on en déduit que $|u_k - l_k| \leq \max_{1\leq j\leq p}(|u_j - l_j|) < \varepsilon$, ce qui permet de conclure à la convergence de toutes les sites coordonnées vers les coordonnées de la limite de $u$.

2) Inversement, supposons que pour tout $k$, la suite coordonnée $u^k$ converge vers $l_k \in \mathbb{K}$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_1, n_2, ..., n_p$ tels que pour tout $k \in [1, ..., p], n \geq k \Rightarrow |u_n^k - l_k| < \varepsilon$.

Posons $n_0 = \max_{1\leq k\leq p}(n_k)$. Pour tout $n \geq n_0$, pour tout $1 \leq k \leq p$, $|u_n^k - l_k| < \varepsilon$, et donc $||u_n - l||_\infty = \max_{1\leq k\leq p}(|u_n^k - l_k|) < \varepsilon$

□

✱Toute partie $A$ est contenue dans son adhérence.

L'adhérence de $A$ est l'ensemble de ses points adhérent. Il suffit donc de montrer ici que tout point de $A$ est adhérent à $A$.

Soit donc $x \in A$, et $r > 0$ quelconque. L'intersection de $A$ et de la boule ouverte de rayon $r$ et de centre $x$ contient $x$ et est donc non vide : le point $x$ est bien adhérent à $A$. Tout point de $A$ appartient à son adhérence, ce qui s'exprime en termes ensemblistes par l'inclusion de $A$ dans son adhérence.

✱$A$ est fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence.

La partie $A$ est fermée, par définition, lorsque tout point adhérent à $A$ appartient à $A$, soit si l'adhérence de $A$ est incluse dans $A$. Or $A$ est toujours incluse dans son adhérence. La partie $A$ est donc fermée si et seulement si elle est égale à son adhérence.

✱$a$ est un point adhérent à $A$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $a$.

L'élément $A$ est un point adhérent à $A$ si pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$. On construit la suite $u$ comme suit :

Pour $n > 0$, l'ensemble $B(a, \frac{1}{n}) \cap A$ est non vide. On prend donc un élément quelconque de cet ensemble qu'on appelle $u_n$. Il vient assez vite que la suite $u$ converge vers $a$, et que ses termes sont des éléments de $A$..

Inversement, soit $r > 0$. Puisqu'il existe une suite $u$ d'éléments de $A$ convergent vers $a$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in B(0, r)$. Alors, pour $n_0$ en particulier, $u_{n_0} \in B(0, r)$, et $u_{n_0} \in A$. L'intersection $B(a, r) \cap A$ est donc non vide.

$A$ est une partie fermée de $E$ si et seulement si toute suite convergente d'éléments de $A$ a pour limite un élément de $A$.

$A$ est une partie fermée de $E$ si et seulement si elle est égale à son adhérence, soit si et seulement si chacun des points qui lui sont adhérents sont dans $A$, c'est-à-dire, avec ce qui précède, si et seulement si toute suite convergente d'éléments de $A$ converge vers un point de $A$.

Attention ! Une suite d'éléments de $A$ peut être convergente sans converger dans $A$ ! Penser par exemple à la suite $(\frac{1}{n})_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, qui converge bien dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{R}^{+*}$, sa limite n'y étant pas. On en déduit que $\mathbb{R}^{+*}$ n'est pas une partie fermée de $\mathbb{R}$.