

Démonstrations EVN

✱ Une partie A de E est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé

Démonstration. On peut procéder par double implication.

Supposons tout d'abord que A est ouverte. Observons alors le complémentaire B de A , et prenons une suite u d'éléments de A , convergente **dans** E . Pour tout $r > 0$, il existe n_0 , tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - l\| < r$. Ceci impose que toute boule centrée en l , quel que soit son rayon, possède au moins un élément de B : elle ne peut être incluse dans A . Puisque A est ouvert, la limite l de u ne peut donc être un élément de A . (Rappel : tout élément d'un ouvert est centre d'une boule incluse dans cet ouvert).

L'implication retour fonctionne sur le même modèle. Supposons que le complémentaire B de A soit fermé. Alors toute suite convergente dans E d'éléments de B converge dans B . Soit x un élément de E , tel qu'aucune boule centrée en x ne soit incluse dans A . Alors, on peut construire une suite d'éléments de B convergeant vers x , et x appartient à B (pour $r = \frac{1}{n}$, la boule de rayon $\frac{1}{n}$ centrée en x n'est pas incluse dans A et comporte donc au moins un élément de B y : on pose $u_n = y$. Il reste à montrer - sans difficulté - la convergence de cette série vers x). Récapitulons : tout élément qui n'est pas dans l'intérieur de A est dans B , et n'est donc pas dans A . Par contraposée, la partie A est ainsi incluse dans son intérieur : c'est une partie ouverte de E .

Le point 2 s'obtient en observant que le complémentaire dans E du complémentaire dans E est la partie de départ.

On remarque au passage que E étant ouvert et fermé, son complémentaire dans E , l'ensemble vide, est également ouvert et fermé. \square

✱ Limite en un point de l'ensemble de définition (propriété 12) Si $a \in A$ et si f admet une limite b en a , alors $b = f(a)$.

Démonstration. On utilise la définition de limite qui vient juste avant la proposition. On observe que a est dans A .

Or pour tout $\varepsilon > 0$, $\|a - a\| = 0$, donc $\|f(a) - b\| < \varepsilon$. Le seul réel positif inférieur à tout réel strictement positif est 0. Par l'axiome de séparation de la norme, on en déduit que $f(x) = b$. \square

✱ Caractérisation séquentielle d'une limite

f admet une limite l en a ssi pour toute suite u d'éléments de A convergeant vers a , la suite $(f(u_n))_n$ converge vers l .

Démonstration. On procède par double implication.

Supposons que f admet une limite l en a . Soit une suite u convergeant vers a .

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que si $\|x - a\| < \eta$, alors $\|f(x) - l\| < \varepsilon$. De plus, pour $\eta > 0$, il existe n_0 , tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|u_n - a\| < \eta$. De ceci on conclut que pour

$n \geq n_0, \|f(u_n) - l\| < \varepsilon$. On a ainsi montré la convergence de la suite $(f(u_n))_n$ vers l .

En ce qui concerne le sens retour, prouvons-en la contraposée. On suppose que f n'admet pas l pour limite en a .

Ce point se traduit de la façon suivante : il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\eta > 0$, on puisse trouver x tel que $\|x - a\| < \eta$ et pourtant $\|f(x) - l\| \geq \varepsilon$. Mais alors, on peut construire une suite u convergeant vers a , telle que son image ne converge pas vers l . (à détailler)

Puisque f est continue en a si a est dans A et si f admet une limite en a , ce qui précède prouve sans difficulté le point 2. □

✱Unicité de la limite - Idée : utilisation de la caractérisation séquentielle d'une limite, et unicité de la limite d'une suite.

✱Composition

Travail sur les epsilon :

On considère N_E, N_F, N_G des normes quelconques sur, respectivement, E, F et G .

Puisque g admet une limite c en b , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η_1 , t.q. si $N_F(y - b) < \eta_1$, alors $N_G(g(y) - g(b)) < \varepsilon$. Or f admet une limite b en a , il existe donc $\eta > 0$ t.q. si $N_E(x - a) < \eta$, alors $N_F(f(x) - b) < \eta_1$.

Ainsi, si $N_E(x - a) < \eta$, alors $N_F(f(x) - b) < \eta_1$, puis $N_G(g \circ f(x) - c) = N_G(g(y) - g(b)) < \varepsilon$:

✱Applications coordonnées dans une base : f admet une limite en a ssi chaque application coordonnée admet une limite en a

Idée : caractérisation séquentielle de la continuité et propriété des suites coordonnées (une suite converge ssi chacune de ses suites coordonnées converge).

La limite en a de f s'obtient grâce aux limites en a des applications coordonnées.

✱Soit f continue. L'ensemble A des vecteurs x t.q. $f(x) \geq 0$ est une partie fermée.

Démonstration. Soit une suite u d'éléments de A convergeant dans E vers un certain x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \geq 0$, et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$. Par continuité de f (en particulier en x), $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$, qui est la limite d'une suite convergente d'éléments de \mathbb{R}^+ . La partie \mathbb{R}^+ de \mathbb{R} étant une partie fermée de \mathbb{R} , on en déduit que $f(x) \geq 0$, et donc, que x appartient à la partie A de E . Toute suite quelconque d'éléments de A convergeant dans E admettant donc une limite dans A , on en déduit que A est une partie fermée de E .

Remarque : tout ensemble de la forme $\{x \in E / f(x) \leq r\}$, avec $r \in \mathbb{R}$ est de même fermée. Soit on reprend la démonstration précédente, soit on pose $h : x \mapsto r - f(x)$, et alors, on observe que $\{x / f(x) \leq r\} = \{x / h(x) \geq 0\}$: c'est bien une partie fermée de E . □

✱Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne, et donc continue.

Démonstration. Soit une application linéaire de E dans F , deux \mathbb{K} -ev de dimensions finies. On note N une norme sur E .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base unitaire de E pour la norme N . Pour tout $x = \sum_i x_i e_i$, par linéarité, $f(x) = \sum_i x_i f(e_i)$.

Ainsi, pour $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_i y_i e_i$ quelconques de E , $N(f(x) - f(y)) = N(\sum_i (x_i - y_i) f(e_i)) \leq \sum_i N((x_i - y_i) e_i)$ par inégalité triangulaire de la norme N . Pour tout i , $(x_i - y_i) \in \mathbb{K}$, et, par homogénéité de la norme, $N((x_i - y_i) e_i) = |x_i - y_i| N(e_i) \leq \|x - y\|_\infty N(e_i)$. Ainsi, $N(f(x) - f(y)) \leq \|x - y\|_\infty \sum_i N(e_i)$.

L'application f est donc lipschitzienne de rapport $k = \sum_i N(e_i)$. Puisqu'elle est lipschitzienne, elle est continue. □

Récapitulatif :

Sont continues (entre autres!) les normes, les applications coordonnées, les applications polynomiales (en une ou plusieurs variables), les applications lipschitziennes, et les applications linéaires. Par produit, somme, composée, etc., on peut désormais prouver la continuité de nombreuses fonctions.

Ceci peut permettre de prouver qu'une partie est ouverte ou fermée. Garder en mémoire l'exemple de l'ensemble des matrices diagonalisables.

Précision/rappel :

Attention!, la continuité en $a \in A$ de x s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

La continuité de f sur une partie A s'écrit

$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in A \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$: le réel η dépend à la fois de la condition que l'on souhaite imposer à l'image de f et de l'endroit où se trouve x dans A .

Enfin, l'uniforme continuité de f sur A s'écrit

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \forall a \in A, \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$: cette fois, η ne dépend plus que de ε .