Produit scalaire et orthogonalité

Preuves ou idées de preuve

1 : $\forall (x,y)\in E^2, \|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)$.

Preuve :
Soient x et y dans E, alors, par définition de la norme puis linéarité du produit scalaire, $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x)+(x|y)+(y|x)+(y|y) = |x|^2+(x|y)+(y|x)+|y|^2$.
Par symétrie du produit scalaire, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2+2(x|y)$.

2 : $\forall (x,y)\in E^2, \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y)$

Preuve :
définition de la norme, linéarité et symétrie du produit scalaire.

3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz **A maîtriser absolument !**

$$\forall (x,y)\in E^2, |(x|y)| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la famille (x,y) est liée.

Preuve :
Pour tout λ, $||x+\lambda y||^2 = (x+\lambda y|x+\lambda y) = \lambda||y||^2 + 2\lambda(x|y) + ||x||^2$.
Si $y=0$ l'inégalité est vérifiée, c'est par ailleurs une égalité et la famille (x,y) est liée.
Si $y\neq 0$, le coefficient de λ^2 est non nul : la norme est un polynôme du second degré en λ.
Notons P le polynôme défini par : $\forall \lambda\in\mathbb{R}, P(\lambda) = ||x+\lambda y||^2$. Une norme étant à valeurs positives, le polynôme P est de signe positif sur $\mathbb{R}$: il n'admet au plus qu'une racine. La quantité (correspondant à son discriminant) $4(x|y)^2 - 4||x||^2||y||^2$ est donc négative ou nulle, ce qui implique l'inégalité attendue.
Le cas d'égalité correspond au cas où P admet une racine double. Ainsi, il existe λ_0 t.q. $P(\lambda_0)=0$, soit $||x+\lambda y|| = 0$. La norme étant définie positive, ceci est équivalent à la non liberté de la famille (x,y).
On conclut en prenant en compte le cas $y=0$.

4 : Inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y)\in E^2, \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

Preuve :

Pour tous x et y de E, $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2(x|y) + ||y||^2$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $||(x|y)|| \leqslant ||x||^2||y||^2$. Puisque tout nombre est inférieur ou égal à sa valeur absolue, on trouve $||x+y||^2 = ||x||^2+2(x|y)+||y||^2 \leqslant ||x||^2+2||x||||y||+||y||^2 = (||x||+||y||)^2$.
Le résultat découle de la croissance de la fonction racine carrée et de positivité de la norme.

5 : Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve :
Soit une famille orthogonale de p vecteurs (tous non nuls) $(e_1, ..., e_p)$ et une famille de p scalaires $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ t.q. $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i = 0$.

On constate que pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $0 = (0|e_i) = (\sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i|p)$, puis, puisque la famille est orthogonale et par linéarité du produit scalaire, qu'ainsi $0 = \lambda_i(e_i|e_i)$. Les vecteurs étant non nuls et le produit scalaire défini positif, alors $\lambda_i = 0$.

Ceci étant valable pour tout i, la famille de p vecteurs est nulle.

Plus largement, supposons que l'on veuille prouver la liberté d'une famille **infinie** de vecteurs, il suffit pour cela de montrer la liberté de toute sous-famille de taille finie. Or, toute sous famille de p vecteurs orthogonaux deux-à-deux et non nuls est libre.

Une famille orthonormale est une famille orthogonale, dont les vecteurs sont de norme 1 (par définie positivité de la norme, ils ne peuvent être nuls), donc est libre.

6 : Théorème de Pythagore

1. e_1 et e_2 sont orthogonaux si et seulement si : $\|e_1 + e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$.
2. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille orthogonale, alors : $\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$.

Savoir appliquer à $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et en déduire $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$

Preuve :

Concernant le premier point, il suffit de développer/utiliser une identité de polarisation. Attention à bien obtenir une équivalence.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille orthogonale. Par bilinéarité du produit scalaire, (remettez les bornes ! il va falloir opérer un changement de variable muette)
$(\sum e_i | \sum e_i) = (\sum e_i | \sum e_j) = \sum_i (e_i | \sum_j e_j)$
Or, par linéarité également, et pour tout i, $(e_i | \sum_j e_j) = (e_i|e_i) + \sum_{i \neq j} (e_i|e_j)$.
La famille étant orthogonale le deuxième terme du membre de droite est nulle, et $(e_i | \sum_j e_j) = (e_i|e_i)$.
Ceci étant valable pour tout i, on en déduit que
$(\sum e_i | \sum e_i) = \sum_i (e_i|e_i)$, ce qui, par définition de la norme, donne bien le résultat attendu.
$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$.

7 : Existence d'une base orthonormée pour E de dimension finie non nulle ; Calculs dans une base orthonormée
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i$.
2. Soient x et y de coordonnées respectives $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$, de matrices X et Y. Alors : $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T X$.

Preuve :
Dans E de dimension finie non nulle, il existe une base. Par le procédé de Gram-Schmidt, on obtient une base de E orthonormalisée.

Soient x et y de coordonnées respectives $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ dans $\mathcal{B} = (e_i)_i$, de matrices X et Y.
Alors : $(x|y) = (\sum_i x_i e_i | \sum_i y_i e_i)$. La bilinéarité du produit scalaire et le caractère orthonormé de $\mathcal{B}$ permet de conclure.

8 : Procédé d'orthogonalisation de Schmidt : connaître et savoir utiliser la méthode.
Soit $(u_1, \cdots, u_q)$ une famille libre dans E. Il existe une famille orthonormée $(e_1, \cdots, e_q)$ telle que : $\forall k \in [\![1, q]\!], \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k)$.

Preuve :
On construit une telle famille par itérations successives et la preuve de l'existence se fait par récurrence.

Soit $\mathcal{P}$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par l'existence, pour toute famille libre de taille n d'une famille orthonormée de même taille engendrant le même espace vectoriel.

Initialisation : Si la famille ne contient qu'un vecteur e, il est forcément non nul et on peut le normaliser en u. On remarque alors que $\mathrm{Vect}(e) = \mathrm{Vect}(u)$. $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité Si la famille libre contient $n+1$ vecteurs $(e_1, ..., e_{n+1})$, l'existence de la base orthonormée $(u_1, ..., u_n)$, telle que $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n) = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)$ est assurée par hypothèse de récurrence.

Le vecteur $u'_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} (e_{n+1}|u_i)u_i$ est orthogonal à tout u_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$, sans être nul, puisque $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n) = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)$ et que la famille $(e_1, ..., e_{n+1})$ est libre. On renormalise le vecteur obtenu pour trouver $u_{n+1} = \frac{u'_{n+1}}{||u'_{n+1}||}$. La famille $(u_1, ..., u_{n+1})$ est donc orthonormée.

Par récurrence, on a donc prouvé l'existence d'une telle famille.

9 : Si F est un s.e.v de dimension finie, alors F et son orthogonal sont supplémentaires dans E. Si E est de dimension finie, alors : $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.

Preuve :
On utilise une base orthonormée de F et de son orthogonal.

10 : Le projeté orthogonal $p_F(x)$ est l'unique vecteur caractérisé par les conditions :

Soit $(e_1, \cdots, e_q)$ une base orthonormée de F. Alors :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{q} (e_i|x)e_i.$$

Savoir calculer un projeté orthogonal, selon le cas, en résolvant un système linéaire ou en utilisant la formule de décomposition sur une b.o.n. (éventuellement sur une base orthogonale).

Preuve :

Attention à bien préciser qu'on projette sur un sous espace de dimension finie !

Si on connaît x et une base de F $(e_i)_i$(non orthonormée, de taille n), on sait que pour tout i, $x - p_F(x)$ est orthogonal à e_i, ce qui s'écrit $(x - p_F(x)|e_i) = 0$, ou encore $(p_F(x)|e_i) = (x|e_i)$. Comme $p_F(x) \in F$, on peut l'écrire sous la forme $p_F(x) = \sum_i \lambda_i e_i$. Ceci nous donne un système de n équations à n inconnues, qu'on peut résoudre pour trouver une expression de $p_F(x)$ dans la base $(e_i)_i$.

Si on connaît une b.o.n. de F, il suffit pour calculer $p_F(x)$ d'utiliser la formule $p_F(x) = \sum (x|e_i)e_i$, laquelle s'obtient en exprimant $p_F(x)$ dans la b.o.n. de F puis en constatant que $(x|e_i) = (p_F(x)|e_i)$ (linéarité du produit scalaire, et $x - p_F(x)$ orthogonal à F).

11 : Inégalité de Bessel Soit $(e_1, \cdots, e_q)$ une famille orthonormale dans E. Alors :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{q} (e_k|x)^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Preuve :
$||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||x - p_F(x)||^2$ (par théorème de Pythagore). On termine la preuve en utilisant l'expression de $p_F(x)$ dans la b.o.n. du s.e.v. sur lequel on projette.

12 : Distance d'un vecteur à un sous-espace
Soit un s.e.v. F et un vecteur $x \in E$. La **distance** de x à F est définie par :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Si F est de dimension finie, le vecteur $y_0 = p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que : $d(x, F) = \|x - y_0\|$.
On a donc : $d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.

Preuve :
Soit x dans E, alors $p_F(x) \in F$. Ceci, avec la définie positivité de la norme, implique l'existence de la distance.
Pour tout y dans F, $p_F(x) - y \in F$, donc $x - p_F(x)$ et $p_F(x) - y$ sont orthogonaux.
Par le théorème de Pythagore, $||x - y||^2 = ||x - p_F(x) + p_F(x) - y||^2 = ||x - p_F(x)||^2 + ||p_F(x) - y||^2 \geqslant ||x - p_F(x)||^2$, avec égalité ssi $y = p_F(x)$. Ceci prouve la place de $p_F(x)$ dans le calcul de la distance de x à F !
La dernière assertion provient encore du théorème de Pythagore.