Ex 2

1) Ω = ensemble des cartes , $\#\Omega = 32$

A = piques , $\#A = 8$

B = coeur ou carreaux , $\#B = 16$

C = valets, dames, rois , $\#C = 12$

D = valet de Trèfle, $\#D = 1$

2) On a équiprobabilité sur l'univers et donc

$$\forall X \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(X) = \frac{\#X}{\#\Omega} = \frac{\#X}{32}$$

$\mathbb{P}(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

$\mathbb{P}(D) = \frac{1}{32}$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{0}{32} = 0$

$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$

$\mathbb{P}(D \cap C) = \frac{1}{32}$

$\mathbb{P}(D \cup C) = \frac{3}{8}$

(on a $D \subset C$).

Ex 3

On a équiprobabilité sur l'univers Ω avec Ω = ensemble des combinaisons de 2 cartes parmi 32.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{32!}{2!30!}} = \frac{8 \times 7}{32 \times 31} = \frac{7}{4 \times 31}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{3}{8 \times 31}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{\binom{8}{1} \times \binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{3}{2 \times 31}$$

choix de la force de la paire : $\binom{8}{1}$

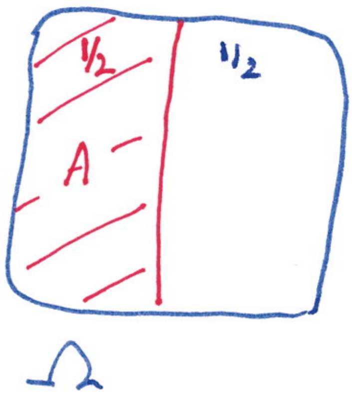
choix des couleurs de la paire : $\binom{4}{2}$

$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(\bar{D}) = 1 - \frac{\# \bar{D}}{\# \Omega} = 1 - \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = 1 - \frac{7 \times 27}{8 \times 31} = \frac{59}{248}$$

Ex 5

On a $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$

on peut avoir $B \subset A$ ou $B \subset \bar{A}$, ce sont les "cas extrêmes".



1) $\mathbb{P}(A \cap B)$ est maximal lorsque $A \supset B$ et alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

$\mathbb{P}(A \cap B)$ est minimal lorsque $A \cap B = \emptyset$ (ce qui est possible puisque $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) < 1$) et alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

Finalement, $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$

On a toujours $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (*)

$\iff \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6} - \mathbb{P}(A \cap B)$.

En utilisant l'encadrement trouvé pour $\mathbb{P}(A \cap B)$, il vient $\frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \frac{5}{6}$.

2) • A∪B sont incompatibles signifie $A \cap B = \emptyset$ et alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$

• Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{7}{12}$ (en vertu de (*))

• A et B sont indépendants signifie $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$

on a alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$