

# DS8 du samedi 13 janvier

## I - Questions de cours : 10 points.

**Chapitre 1 :** *beaucoup de choses à retenir et de notations à apprendre mais ce ne sont pas des questions de cours.*

Des définitions à connaître :

- Union de deux ensembles
- Intersection de deux ensembles
- Produit cartésien de deux ensembles
- Valeur absolue d'un nombre réel

## Chapitre 2 :

Des définitions à connaître :

- Formes algébrique et exponentielle
- Conjugué
- Module
- Arguments (d'un complexe non nul)

Des formules à maîtriser :

- Module d'un complexe dont on connaît la forme algébrique :  $|a+ib| =$
- Le module peut permettre de calculer des distances :  $AB =$
- Produit d'un complexe et de son conjugué :  $z.\bar{z} =$
- Inégalité triangulaire
- Formules d'Euler
- Formule de Moivre

## Chapitre 3 :

Des définitions à connaître : (*Conseil : savoir faire un schéma pour chaque définition*).

- Applications surjectives, injectives, bijectives
- Application réciproque d'une application bijective
- Fonctions majorée, minorée, bornée ; maximum et minimum d'une fonction
- Fonctions croissante, décroissante
- Nombre dérivé
- Fonctions trigonométriques réciproques
- Fonctions exponentielles et puissances, logarithme décimal

Des formules à maîtriser :

- Équation de la tangente
- Formes indéterminées de références (obtenues avec le nombre dérivé)
- Formules de dérivation (somme, produit, quotient, composée)
- Dérivées des fonctions trigonométriques réciproques
- Notation «  $a$  puissance  $b$  »

Des théorèmes et propriétés à savoir précisément :

- Théorème de la bijection

## Chapitre 4 :

Des définitions à connaître :

- Homothétie de centre  $A$  et de rapport  $k$
- Racine carrée d'un nombre complexe
- Exponentielle complexe

Des formules à maîtriser :

- Caractérisation complexe d'une translation
- Caractérisation complexe de l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $k$
- Caractérisation complexe de la rotation de centre  $O$  et de rapport  $\theta$
- Solutions d'une équation du second degré
- Somme et produit des solutions d'une équation du second degré
- Racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité : leur valeur, leur somme est nulle

Des théorèmes et propriétés à savoir précisément :

- On peut décider la colinéarité (et donc l'alignement) avec les complexes
- On peut décider l'orthogonalité avec les complexes
- Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées

**Chapitre 5 :** *du vocabulaire nouveau qui ne constitue pas vraiment des questions de cours mais à maîtriser impérativement (ordre, linéaire, homogène, second membre...)*

Des définitions à connaître :

- Primitive d'une fonction
- Fonction de classe  $C^1$

Des formules à maîtriser :

- Si on dispose d'une primitive, on sait calculer une intégrale
- Formule de l'IPP (*attention :  $u$  et  $v$  doivent être de classe  $C^1$* )
- Formule de changement de variable (*attention :  $\varphi$  doit être de classe  $C^1$* )

Des théorèmes et propriétés à savoir précisément :

- Théorème fondamental de l'analyse (conséquence : toute fonction continue admet des primitives)
- Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1
- Solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

**Chapitre 6 :** Arithmétique. Non évalué.

## Chapitre 7 : Suites

Des définitions à connaître :

- Bornes supérieure et inférieure
- Suites minorées, majorées, bornées
- Approximation décimale d'un réel
- Suite croissante ou décroissante (*pour s'exercer sur les quantificateurs, dire ce qu'est une suite qui n'est pas croissante, dire ce qu'est une suite croissante à partir d'un certain rang*)
- Limite (finie ou infinie) d'une suite
- Suites adjacentes

Des exemples de référence à maîtriser :

- Suites arithmétiques et géométriques
- Suites arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2
- Suite extraite des termes d'indices pairs, d'indices impairs

Des théorèmes et des propriétés à connaître et à savoir utiliser :

- Théorème de la limite monotone
- Soit  $u$  de la forme «  $u_{n+1}=f(u_n)$  » avec  $f$  qui est continue. Si  $u$  converge alors sa limite est un point fixe de  $f$
- Théorème des gendarmes
- Utilisation des suites extraites

## Chapitre 8 : Equations différentielles du second ordre

Du vocabulaire à comprendre et à connaître : quelles sont les équations qu'on apprend à résoudre dans ce chapitre ? (ordre 2, linéaire, coefficients constants).

Une méthode à connaître et qu'il faut savoir mettre en œuvre :

- résolution de l'équation homogène en fonction des solutions de l'équation caractéristique, on trouve une infinité de fonctions qui dépendent de deux paramètres ;
- recherche d'une solution particulière ;
- la solution générale s'obtient en additionnant la solution particulière aux solutions de l'équation homogène ;
- lorsqu'il y a des conditions initiales, on arrive à fixer les valeurs des paramètres et à avoir une seule fonction.

## Chapitre 9 : Matrices

Un nouvel objet avec des opérations à connaître et à comprendre :

- on peut additionner les matrices de même taille,
- on peut multiplier deux matrices lorsque leurs tailles sont compatibles, le produit matriciel a points communs avec les produits de nombres (distributivité, existence d'un élément neutre) mais aussi des singularités (il n'est pas commutatif, il n'est pas intègre).
- Pour les cas des matrices carrées le produit est toujours possible, on définit par récurrence les puissances (entières) et la formule du binôme est valide si les matrices commutent.
- Transposition.

Lien entre les matrices et les systèmes linéaires :

- résoudre un système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues, c'est résoudre une équation  $AX=B$  (avec  $A$  qui a  $n$  lignes et  $p$  colonnes,  $X$  qui est la colonne des inconnues et  $B$  la colonne des seconds membres) ;
- les opérations sur les lignes correspondent à des multiplications à gauche par des matrices inversibles.
- L'intérêt de cela est de justifier que la méthode de Gauss permet bien de résoudre les systèmes par équivalence.
- En pratique, on applique l'algorithme de Gauss qu'on peut présenter avec des systèmes ou alors du point de vue matriciel.

Inversion des matrices carrées :

- qu'est-ce qu'on appelle inverse d'une matrice ?
- Toutes les matrices ne sont pas inversibles (un exemple de matrice non inversible?). On a deux questions à traiter : une matrice donnée est-elle inversible ? Si oui, quelle est son inverse ?
- Pour les matrices  $2 \times 2$ , c'est facile avec le déterminant : la matrice est inversible ssi le déterminant est non nul ; le cas échéant on a une formule pour l'inverse.
- Pour une matrice  $A$  plus grande, les deux questions sont compliquées et à ce stade du cours on y répond de façon simultanée avec l'algorithme de Gauss : on l'applique à  $(A|I_n)$  et si on arrive à  $(I_n|B)$  alors  $B$  est l'inverse de  $A$ , sinon  $A$  n'est pas inversible. (Il y a une autre façon de présenter cela : on résout  $AX=B$  et, si on arrive à trouver une solution on en déduit l'inverse de  $A$ ).
- Dans un chapitre de fin d'année, on généralisera le déterminant aux matrices  $n \times n$  et on aura alors un outil efficace pour savoir si une matrice est inversible ou non. Par contre, on n'aura pas mieux que la méthode précédente pour calculer l'inverse.

## Chapitre 10 : continuité

Des définitions à connaître et à comprendre :

- Limites (finie, infinie, en un nombre, à gauche et/ou à droite, en l'infini).
- Fonction continue ou non.
- Savoir donner des exemples et des contre-exemples (graphiquement et/ou avec des expressions algébriques).

LE théorème de la continuité : TVI. Il faut parfaitement connaître son énoncé (quelles hypothèses, quelle conclusion) et ses « améliorations » (si on rajoute la stricte monotonie on gagne l'unicité ; on peut travailler sur des intervalles non bornés en prenant les limites).

Des méthodes à connaître et à savoir utiliser :

- Pour étudier la continuité en un point : on étudie la limite (éventuellement à gauche et à droite, par exemple si la fonction est définie par morceaux).
- Pour étudier une limite on peut se servir de la définition ou des opérations sur les limites.
- Dans le cas d'une forme indéterminée certaines astuces classiques sont à essayer (factoriser par le terme le plus puissant, utilisation de la quantité conjuguée pour supprimer des racines carrées, faire apparaître « ce qui manque » pour simplifier une fraction), il faut également avoir en tête les formes indéterminées de référence (souvent issues du nombre dérivé), par exemple  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .
- Si on veut montrer qu'une fonction  $f$  n'a pas de limite en  $x_0$  (réel ou infini), on cherche deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  qui tendent vers  $x_0$  telles que  $(f(u_n))$  et  $(f(v_n))$  n'aient pas la même limite.
- Si une fonction est continue, l'image d'un intervalle est un intervalle, mais pas nécessairement de la même nature. Pour calculer cette image, on travaille par disjonction de cas sur des sous-intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone.
- On peut se servir du TVI pour donner le nombre de solutions d'une équation  $f(x)=k$ .

## Chapitre 11 : Polynômes

Des définitions et des formules à connaître :

- vocabulaire et notations (degré, polynôme unitaire...)
- arithmétique : divisibilité, division euclidienne, polynôme irréductible, polynôme scindé

- polynôme dérivé, formules de Leibniz et de Taylor.
- Lien entre coefficients et racines.

Théorème de Gauss et conséquences :

- Les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont scindés.
- Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont exactement les polynômes de degré 1 ; les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 ayant un discriminant strictement négatif.
- Tout polynôme se décompose en produit de polynômes irréductibles (pour trouver la factorisation, rien de neuf : soit il y a un facteur évident, soit une égalité remarquable, soit il faut trouver une racine évidente  $\alpha$  puis factoriser par  $X-\alpha$ ).

Fractions rationnelles : du vocabulaire et une méthode à connaître pour décomposer en éléments simples.

## II - Savoirs-Faire : 10 points.

- Factoriser avec l'angle moitié
- Calculer une intégrale avec une primitive, une IPP ou un changement de variable
- Équation différentielle linéaire d'ordre 1
- Résoudre un polynôme du second degré (avec un discriminant complexe)
- Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
- Suites arithmético-géométriques
- Calculer un produit matriciel
- Inverser une matrice  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$
- Truc sympatoche avec les matrices (genre ex7)
- Résoudre un système linéaire
- Calculer une limite (application possible : prolongeabilité par continuité)
- TVI et applications (nb de solutions à  $f(x)=k$  ; image d'un intervalle)
- Poser une division euclidienne