

Programme de la colle 1

Semaine du lundi 15 au vendredi 19 septembre 2025

Liste des questions de cours :

- Définition d'une somme directe de deux ou plus généralement k sous-espaces vectoriels
- Caractérisations d'une somme directe (dont le cas de la dimension finie)
- Définition de deux ou plus généralement k sous-espaces vectoriels supplémentaires
- Caractérisations de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires (dont le cas de la dimension finie)
- Base adaptée à une décomposition de E en somme directe
- Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire
- Caractérisations de l'injectivité, de la surjectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau et de l'image
- Définition et propriétés des projections + dessin
- Définition et propriétés des symétries + dessin
- Théorème du rang
- Caractérisation des hyperplans
- Produit de deux matrices

Chapitre 1a : Espaces vectoriels - révisions et compléments

- **Rappels** : espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, sous-espaces vectoriels, stabilité par intersection, sous-espaces vectoriels engendrés par une famille
- **Rappels** : familles génératrices, familles libres, bases, coordonnées dans une base (notation matricielle).
- **Rappels** : somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe et caractérisation, sous-espaces vectoriels supplémentaires et caractérisation,
- **Rappels** : espaces vectoriels de dimension finie, dimension d'un espace vectoriel, lien avec les familles génératrices, libres et bases, formule de Grassmann, existence d'un supplémentaire, CNS de supplémentarité
- **Rappels** : rang d'une famille de vecteurs, caractérisation des familles à l'aide du rang
- **Compléments** : produits finis d'espaces vectoriels $E_1 \times \cdots \times E_n$, dimension du produit
- **Compléments** : somme de k sous-espaces vectoriels $F_1 + \cdots + F_k$, somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$, caractérisation d'une somme directe (unique décomposition du vecteur nul), décomposition d'un espace vectoriel en somme directe, cas de la partition d'une base, base adaptée à un sous-espace vectoriel, base adaptée à une somme directe, dimension d'une somme.

Chapitre 1b : Applications linéaires - révisions

- **Rappels** : applications linéaires, endomorphismes, opérations sur les applications linéaires, isomorphismes, automorphismes, noyau, image, caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives
- **Rappels** - endomorphismes remarquables : homothéties, projections, projecteurs (ce sont les projections sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$), propriétés, symétries, lien avec les projections. *Savoir faire un dessin !*
- **Rappels** - cas de la dimension finie : l'image par f d'une base de E est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$, définition d'une unique application linéaire par l'image d'une base, caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité par l'image d'une base, espaces vectoriels isomorphes, définition d'une application linéaire sur des sous-espaces supplémentaires, rang d'une application linéaire, théorème du rang, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\dim(E) = \dim(F)$
- **Rappels** : formes linéaires, hyperplans, caractérisation des hyperplans comme noyau d'une forme linéaire **non nulle**

Chapitre 2a : Calcul matriciel - révisions et compléments

- **Rappels** : l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, produit de matrices, transposée d'une matrice, matrices symétriques et anti-symétriques, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Rappels** : écriture matricielle d'un système linéaire, rang d'une matrice, lien avec le rang d'un système, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$
- Puissances d'une matrice carrée, formule du binôme de Newton, trace, propriétés de la trace, matrices carrées inversibles, propriétés, caractérisation de l'inversibilité, recherche de l'inverse à l'aide d'un système
- Matrices définies par blocs : définition, opérations sur la matrices définies par blocs (attention à la compatibilité des tailles).