Programme de la colle 4

Semaine du lundi 6 au vendredi 10 octobre 2025

Liste des questions de cours :

- convergence et sommes des séries géométriques
- convergence et sommes des séries exponentielles
- convergence des séries Riemann
- Convergence d'une série télescopique
- Théorème de comparaison des séries à termes positifs (inégalités)
- Théorème de comparaison des séries à termes positifs (équivalents)
- Règle de d'Alembert
- Théorème de comparaison des séries (domination)
- Critère spécial des séries alternées
- Convergence du produit de Cauchy de séries absolument convergentes
- Formule de Stirling
- Valeur d'un déterminant de Vandermonde
- existence et unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$ d'un polynôme interpolateur de Lagrange associés à $(a_0, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts et $(b_0, \ldots, b_n)$.
- Démonstration : si u et v sont des endomorphismes qui commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
- Caractérisation matricielle dans une base adaptée de F sous-espace stable de u

Bien insister sur les séries numériques.

Chapitre 3 : Séries numériques - révisions et compléments

- Définition d'une série, suite des sommes partielles (S_n), convergence, divergence.
  Somme et reste d'ordre n R_n d'une série convergente : la suite (R_n) converge vers 0.
- Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. Divergence grossière.
  Combinaison linéaire de séries convergentes. Convergence des séries à termes complexes.
  Séries télescopiques : lien suite/série.
- **Séries de référence** : séries géométriques, séries exponentielles, séries de Riemann.
- **Convergence des séries à termes positifs** :
  La suite (S_n) étant croissante, elle converge ssi elle est majorée.
  Théorèmes de comparaison des séries à termes positifs (inégalités, équivalents).
  Règle de d'Alembert.
- **Convergence des séries à termes quelconques** :
  Définition de la convergence absolue, la convergence absolue entraine la convergence.
  Théorème de comparaison des séries par domination (ou avec o).
  Séries alternées, critère spécial des séries alternées : signe de la somme S et majoration de $|S|$, signe de R_n et majoration de $|R_n|$.
- **Compléments** :
  Comparaison avec une intégrale (méthode des rectangles pour encadrer $f(k)$ pour f continue monotone), encadrement de S_n, de R_n.
  Produit de Cauchy : définition, convergence absolu d'un produit de Cauchy de séries absolument convergentes.
  Formule de Stirling.

Chapitre 4a : Déterminant - Interpolation de Lagrange

— Rappels de PCSI sur les déterminants : déterminant d'une matrice, d'un endomorphisme, propriétés. Calcul par développement suivant une ligne ou une colonne, cas des matrices triangulaires par blocs (avec blocs diagonaux carrés).

— Déterminant de Vandermonde, Polynômes de Lagrange associés aux points $(a_0, \dots, a_n)$ deux à deux distincts, bases de polynômes de Lagrange, polynôme interpolateur de Lagrange (exitence et unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$), lien avec les matrices de Vandermonde.

Chapitre 4b : Polynômes d'endomorphismes et de matrices - Sous-espaces stables

— Polynômes d'endomorphismes et de matrices, propriétés, polynômes annulateurs, existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice.

— Applications des polynômes annulateurs : justification de l'inversibilité d'une matrice, et de la bijectivité d'un endomorphisme, détermination de l'inverse, calcul des puissances d'une matrice.

— Sous-espaces stables, notion d'endomorphisme induit, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u, stabilité d'un vect. Si u et v sont des endomorphismes qui commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v. Caractérisation matricielle dans une base adaptée de F sous-espace stable de u, extension à une décomposition de E comme somme directe de sous-espaces stables.