

Programme de la colle 6

Semaine du lundi 3 au vendredi 7 novembre 2025

Liste des questions de cours :

- Théorème sur les sommes de Riemann
- Intégration par parties (sur un segment)
- Changement de variables (sur un segment)
- Définition d'une fonction continue par morceaux
- Définition de la convergence d'un intégrale généralisée sur $[a, b[,]a, b]$
- Convergence des intégrales généralisées de référence (avec démonstration)
- Théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives ($\leq$, O , o , $\sim$)
- Intégration par parties (intégrales généralisées)
- Changement de variables (intégrales généralisées)
- Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle I
- Caractère local de l'intégrabilité (fonction intégrable en a)
- Fonctions intégrables de référence (avec démonstration)
- Théorèmes de comparaison sur l'intégrabilité (O , o , $\sim$)

Chapitre 5a : Intégration sur un segment

- Rappels de PCSI : notion de primitive, théorème fondamental de l'analyse, sommes de Riemann (méthode des rectangles), intégration par parties, changement de variables, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Fonctions continues par morceaux sur un segment : définition, toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée, $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$, définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés (linéarité, Chasles, positivité et croissance, inégalité triangulaire).
- Définition des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I , $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, pour $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue.

Chapitre 5b : Intégration sur un intervalle quelconque

- Convergence / divergence de l'intégrale généralisée d'une fonction f continue par morceaux sur $[a, b[$ (*resp.* sur $]a, b]$), caractère local de la nature d'une intégrale, compatibilité des définitions d'intégrales pour une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$; il n'y a pas de lien entre convergence de $\int_a^{+\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f = 0$,
- Intégrales de référence : $t \mapsto e^{-\alpha t}$, $t \mapsto \ln(t)$ et Riemann y compris la généralisation à d'autres bornes que 0.
- Cas particulier des intégrales faussement généralisées.
- Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert non vide.
- Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives ($\leq$, O , o , $\sim$).
- Calcul d'intégrales généralisées : intégration par parties, changement de variables.
- Intégrabilité : convergence absolue, la convergence absolue entraîne la convergence, fonction intégrable sur I , l'espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$, caractère local de l'intégrabilité (fonction intégrable en a), intégrabilité des fonctions à valeurs complexes, fonctions intégrables de référence, nullité de l'intégrale, théorèmes de comparaison (O , o , $\sim$), comparaison aux intégrales de Riemann.