Programme de la colle 8

Semaine du lundi 17 au vendredi 21 novembre 2025

Liste des questions de cours :

- Définition de la convergence d'un intégrale généralisée sur $[a, b[$, $]a, b]$
- Convergence des intégrales généralisées de référence (avec démonstration)
- Théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives ($\leqslant$, O, o, $\sim$)
- Intégration par parties (intégrales généralisées)
- Changement de variables (intégrales généralisées)
- Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle I
- Caractère local de l'intégrabilité (fonction intégrable en a)
- Fonctions intégrables de référence (avec démonstration)
- Théorèmes de comparaison sur l'intégrabilité (O, o, $\sim$)
- Définition de (f_n) converge simplement vers f sur I
- Définition de (f_n) converge uniformément vers f sur I
- Théorème de continuité de la limite f sur I (avec démonstration pour le groupe $*$)
- Théorème d'intégration de la limite f sur $[a, b]$ (avec démonstration pour le groupe $*$)

Chapitre 5b : Intégration sur un intervalle quelconque

- Convergence / divergence de l'intégrale généralisée d'une fonction f continue par morceaux sur $[a, b[$ (*resp.* sur $]a, b]$), caractère local de la nature d'une intégrale, compatibilité des définitions d'intégrales pour une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$; il n'y a pas de lien entre convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$,
- Intégrales de référence : $t \mapsto e^{-\alpha t}$, $t \mapsto \ln(t)$ et Riemann y compris la généralisation à d'autres bornes que 0.
- Cas particulier des intégrales faussement généralisées.
- Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert non vide.
- Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives ($\leqslant$, O, o, $\sim$).
- Calcul d'intégrales généralisées : intégration par parties, changement de variables.
- Intégrabilité : convergence absolue, la convergence absolue entraine la convergence, fonction intégrable sur I, l'espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$, caractère local de l'intégrabilité (fonction intégrable en a), intégrabilité des fonctions à valeurs complexes, fonctions intégrables de référence, nullité de l'intégrale, théorèmes de comparaison (O, o, $\sim$), comparaison aux intégrales de Riemann.

Chapitre 6a : Suites de fonctions

- Différentes convergences d'une suite de fonctions :
  Convergence simple, convergence uniforme, notation $\|f\|_{\infty,I}$ pour f bornée sur I, lien avec la convergence uniforme.
  La convergence uniforme sur I implique la convergence simple sur I, la réciproque est fausse.
  Pour montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur I, on peut majorer $|f_n(x) - f(x)|$ uniformément en x par α_n terme général d'une suite qui tend vers 0.
  Pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I, on peut trouver une suite (x_n) telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0.

- Propriétés de la fonction limite f :
  monotonie (CVS sur I),
  continuité (CVU sur I ou sur tout segment de I ou sur une famille adaptée de segments de I),
  intégration sur un segment,
  classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$.
  Ces résultats permettent dans certains cas de montrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.
- Théorème de convergence dominée.