

Programme de la colle 10

Semaine du lundi 1er au vendredi 5 décembre 2025

Liste des questions de cours :

- Définition de $\sum u_n$ converge simplement sur I
- Définition de $\sum u_n$ converge uniformément sur I
- Définition de $\sum u_n$ converge normalement sur I
- Théorème de continuité de la somme S sur I d'une série de fonctions $\sum u_n$
- Théorème de la double limite d'une série de fonctions $\sum u_n$
- Théorème d'intégration terme à terme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions $\sum u_n$
- Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions $\sum u_n$
- Théorème de dérivation (classe \mathcal{C}^p) d'une série de fonctions $\sum u_n$
- Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.
- Définition des éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice.
- Définition et propriétés du polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Propriétés des sous-espaces propres (somme directe, dimension en lien avec la multiplicité)
- Montrer que si P est annulateur de u alors $\text{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$ (groupe $*$)
- Montrer que si F est un sev de E est stable par u , alors en notant u_F l'endomorphisme induit par u sur F : χ_{u_F} divise χ_u (groupe $*$)

Chapitre 6b : Séries de fonctions

- Différentes convergences d'une série de fonctions :
Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence uniforme sur I implique la convergence simple sur I , la réciproque est fautive. La convergence normale sur I implique la convergence uniforme sur I , la réciproque est fautive. La convergence normale sur I implique la convergence absolue de la série $\sum u_n(x)$ pour tout $x \in I$.
- Propriétés de la somme S d'une série de fonctions $\sum u_n$:
monotonie (CVS sur I),
continuité (CVU sur I ou sur tout segment de I ou sur une famille adaptée de segments de I),
théorème de la double limite,
théorème d'intégration terme à terme sur un segment $[a, b]$,
théorème de dérivation terme à terme (classe \mathcal{C}^1 , classe \mathcal{C}^p).
Ces résultats permettent dans certains cas de montrer que la convergence n'est pas uniforme sur I .
- Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Chapitre 7a : Éléments propres d'un endomorphisme - d'une matrice carrée

- Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme, spectre d'un endomorphisme d'un ev E de dimension finie, λ valeur propre de u ssi $u - \lambda \text{id}_E$ non injectif, équation aux éléments propres.
Sous-espaces propres, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre, u possède au plus $n = \dim(E)$ valeurs propres, $\sum \dim(E_\lambda(u)) \leq n$.
Si u et v commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
Valeurs propres et polynômes d'endomorphisme : si $u(x) = \lambda x$, alors pour tout entier k , $u^k(x) = \lambda^k x$ et plus généralement pour tout polynôme P , $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Si P est un polynôme annulateur de u , alors $\text{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$.

- Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée de taille n , spectre d'une matrice.
 λ valeur propre de A ssi $A - \lambda I_n$ non inversible, équation aux éléments propres.
 Sous-espaces propres, théorème du rang pour déterminer la dimension d'un sous-espace propre en fonction du rang de $A - \lambda I_n$.
 A possède au plus n valeurs propres.
 Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice qui le représente. Adaptation aux matrices des résultats vus pour les endomorphismes.
- Polynôme caractéristique d'une matrice, degré et coefficients du polynôme caractéristique, $\chi_A = \chi_{A^T}$, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Cas des matrices triangulaires par blocs (avec blocs diagonaux carrés).
 Lien avec les valeurs propres : ce sont les racines du polynôme caractéristique, cas des matrices triangulaires supérieures ou inférieures.
 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace E de dimension finie. Adaptation des propriétés vues pour les matrices.
 Si F est un sev de E stable par u , alors en notant u_F l'endomorphisme induit par u sur F : χ_{u_F} divise χ_u .
 Détermination de la trace et du déterminant de u lorsque χ_u est scindé.
 Multiplicité d'une valeur propre, $\dim E_\lambda(u) \leq m_u(\lambda)$.
 Cas particulier des matrices à coefficients réels : spectre sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} , $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ssi $\bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$ ssi $\bar{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A)$.