Programme de la colle 11

Semaine du lundi 8 au vendredi 12 décembre 2025

Liste des questions de cours :

— Définition des éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice.

— Définition et propriétés du polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme.

— Propriétés des sous-espaces propres (somme directe, dimension en lien avec la multiplicité)

— Montrer que si P est annulateur de u alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$ (groupe $*$)

— Montrer que si F est un sev de E est stable par u, alors en notant u_F l'endomorphisme induit par u sur F : χ_{u_F} divise χ_u (groupe $*$)

— Définition de u (*resp.* A) diagonlisable.

— Caractéristation de u (*resp.* A) diagonalisable à l'aide des sous-espaces propres.

— Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité.

— Caratérisation de u (*resp.* A) diagonalisable à l'aide du polynôme caractéristique.

— Caratérisations de u (*resp.* A) diagonalisable à l'aide de polynômes annulateurs.

— Définition de u (*resp.* A) trigonlisable.

— Caratérisation de u (*resp.* A) trigonalisable à l'aide du polynôme caractéristique.

— Calcul de la trace et du déterminant d'une endomorphisme (*resp.* d'une matrice) diagonalisable ou trigonalisable à l'aide des valeurs propres et de leur multiplicité.

— Théorème de Cayley-Hamilton.

Chapitre 7a : Éléments propres d'un endomorphisme - d'une matrice carrée

— Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme, spectre d'un endomorphisme d'un ev E de dimension finie, λ valeur propre de u ssi $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ non injectif, équation aux éléments propres.
Sous-espaces propres, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre, u possède au plus $n = \dim(E)$ valeurs propres, $\sum \dim(E_\lambda(u)) \leqslant n$.
Si u et v commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
Valeurs propres et polynômes d'endomorphisme : si $u(x) = \lambda x$, alors pour tout entier k, $u^k(x) = \lambda^k x$ et plus généralement pour tout polynôme P, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Si P est un polynôme annulateur de u, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$.

— Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée de taille n, spectre d'une matrice.
λ valeur propre de A ssi $A - \lambda I_n$ non inversible, équation aux éléments propres.
Sous-espaces propres, théorème du rang pour déterminer la dimension d'un sous-espace propre en fonction du rang de $A - \lambda I_n$.
A possède au plus n valeurs propres.
Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice qui le représente. Adaptation aux matrices des résultats vus pour les endomorphismes.

— Polynôme caractéristique d'une matrice, degré et coefficients du polynôme caractéristique, $\chi_A = \chi_{A^\top}$, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Cas des matrices triangulaires par blocs (avec blocs diagonaux carrés).
Lien avec les valeurs propres : ce sont les racines du polynômes caractéristique, cas des matrices triangulaires supérieures ou inférieures.
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace E de dimension finie. Adaptation des propriétés vues pour les matrices.
Si F est un sev de E est stable par u, alors en notant u_F l'endomorphisme induit par u sur F : χ_{u_F} divise χ_u.
Détermination de la trace et du déterminant de u lorsque χ_u est scindé.
Multiplicité d'une valeur propre, $\dim E_\lambda(u) \leqslant m_u(\lambda)$.
Cas particulier des matrices à coefficients réels : spectre sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ssi $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$ ssi $\overline{X} \in E_{\overline{\lambda}}(A)$.

Chapitre 7b : Réduction des endomorphismes - matrices carrées

Soit E espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— Diagonalisation : définition pour un endomorphisme, une matrice. Lien entre la diagonalisabilité d'un endomorphisme u et d'une matrice A qui le représente. A est diagonalisable ssi $A^\top$ est diagonalisable.
Caractérisation :
  - — il existe une base de vecteurs propres,
  - — E se décompose en la somme directe des sous-espaces propres,
  - — $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$.

  Condition suffisante de diagonalisabilité 1 : si u (*resp.* A) possède n valeurs propres distinctes, alors u (*resp.* A) est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
  Cas d'un matrcie diagonalisable n'ayant qu'une seule valeur propre λ : elle est semblable donc égale à λI_n.
  Condition suffisante de diagonalisabilité 2 : toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
  u (*resp.* A) est diagonalisable ssi χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_u(\lambda)$. Cas particulier où χ_u est scindé à racines simples (les sous-espaces propres sont de dimension 1).
  Caractérisation de u diagonalisable à l'aide de polynômes annulateurs :
  - — $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}(X - \lambda)$ est annulateur de u
  - — il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

  Conséquence : soit u_F l'endomorphisme induit par u sur F (sev de E stable par u). Si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.
  Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

— Trigonalisation : définition pour un endomorphisme, une matrice.
Caractérisation en termes de sous-espaces stables.
u (*resp.* A) est trigonalisable ssi χ_u est scindé. Ce résultat est donc toujours vrai lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Attention : aucune technique de trigonalisation n'est à connaître.
Calcul de la trace et du déterminant d'une endomorphisme (*resp.* d'une matrice) diagonalisable ou trigonalisable à l'aide des valeurs propres et de leur multiplicité.
Théorème de Cayley-Hamilton.