Programme de la colle 14

Semaine du lundi 12 au vendredi 16 janvier 2026

Liste des questions de cours :

— Théorème de Fubini (cas des familles de réels positifs ou des familles de complexes).
— Définition d'une tribu sur Ω.
— Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable.
— Définition d'un système complet d'événements, d'un système quasi-complet d'événements (différence entre les deux)
— Théorème de continuité croissante et décroissante + démonstration (groupe $*$).
— Formule des probabilités composées + démonstration (groupe $*$).
— Formule des probabilités totales + démonstration (groupe $*$).
— Formule de Bayes.
— Indépendance de deux événements, d'une famille d'événements, d'une suite d'événements.
— Définition d'une variable aléatoire.
— Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
— Définition de X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
— Absence de mémoire d'une variable de loi géométrique + démonstration (groupe $*$).
— Définition de X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
— Approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale.
— Loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes, obtention des lois marginales.
— Lois conditionnelles.
— Indépendance de deux variables aléatoire, d'une famille de variables aléatoires, d'une suite de variables aléatoires.
— Transfert d'indépendance, lemme des coalitions.
— Stabilité de la loi binomiale (cas $n = 2$ ou cas général) + démonstration (groupe $*$).
— Stabilité de la loi de Poisson (cas $n = 2$ ou cas général) + démonstration (groupe $*$).

Chapitre 8a : Ensembles dénombrables - familles sommables

Ce chapitre ne doit pas faire l'objet d'un exercice.

— Ensembles dénombrables : définition et propriétés.

— Familles sommables de réels positifs : définition, propriétés (croissance, linéarité dans $\mathbb{R}_+$), sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes de réels positifs.

— Familles sommables de réels ou complexes : définition (parties positive et négative d'un réel, parties réelle et imaginaire d'un complexe), propriétés (croissance, linéarité, inégalité triangulaire), sommation par paquets pour une famille sommable, théorème de Fubini pour une famille sommable, produit de deux sommes de familles sommables de complexes.

Chapitre 8b : espaces probabilisés

— Expériences aléatoires, univers Ω, tribu sur Ω, événement, vocabulaire sur les événements, opérations sur les événements, système complet d'événements.

— Espace probabilisé : définition d'une probabilité (axiome de σ-additivité), espace probabilisé, événements presque sûrs, négligeable, système quasi-complet d'événements.
Propriétés d'une probabilité, théorème de continuité croissante et décroissante et conséquences pour le calcul d'une probabilité d'union ou intersection dénombrable à l'aide d'une limite, sous-additivité finie ou dénombrable.
Espace probabilisé sur un univers dénombrable : caractérisation d'une probabilité par une distribution de probabilités.

— Probabilités conditionnelles : définition, propriétés, formule de probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes (deux versions : simple et à l'aide d'un système complet d'événements).

— Indépendance d'événements : définition de deux événements indépendants, caractérisation en termes de probabilités conditionnelles, propriété avec les événements contraires.
Indépendance mutuelle d'une famille d'événements, indépendance mutuelle d'une suite d'événements, propriétés avec les événements contraires.

Chapitre 8c : Variables aléatoires discrètes - lois discrètes usuelles

Attention : pas d'espérance ni de variance dans ce chapitre.

— Variables aléatoires discrètes : définition, notations $(X = x)$ et $(X \in A)$, indicatrice d'un événement.
Loi de probabilité d'une variable aléatoire, système complet d'événements associé à une variable aléatoire, caractérisation de la loi à l'aide de la distribution de probabilité $(P(X = x))$,
variable aléatoire presque sûrement constante, notion de variables qui suivent la même loi (pas nécessairement égales).
Variables aléatoires définies comme fonctions d'une autre variable aléatoire, loi de $f(X)$, propriétés.

— Lois discrètes usuelles :
Loi uniforme sur un ensemble E : définition, simulation en `Python`.
Loi de Bernoulli : définition, simulation en `Python`.
Loi binomiale : définition, schéma de Bernoulli (situation type), simulation en `Python`.
Loi géométrique : définition, situation type, calcul de $P(X > k)$, absence de mémoire, simulation en `Python`.
Loi de Poisson : définition, approximation par une loi binomiale.

Chapitre 8d : Couples variables aléatoires discrètes - indépendance

— Couples de variables aléatoires discrètes : système complet d'événement associé à un couple de variables aléatoires discrètes, loi conjointe, lois marginales, obtention des lois marginales à partir de la loi conjointe, lois conditionnelles, liens entre les différentes lois.
Extension au n-uplets de variables aléatoires.

— Indépendance de variables aléatoires : cas de deux variables aléatoires, transfert d'indépendance (X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $f(X)$ et $g(Y)$ indépendantes).
Cas d'une famille finie de variables aléatoires discrètes, cas des sous-familles, transfert d'indépendance, lemme des coalitions.
Suite de variables aléatoires discrètes, notion de suite de variables i.i.d.

— Variables de la forme u(X,Y) : loi, cas de la somme de deux variables aléatoires discrètes, stabilité des lois binomiale et de Poisson.
Généralisation à la somme de n variables aléatoires discrètes, stabilité des loi binomiale et de Poisson.
Recherche de la loi d'un minimum et d'un maximum sur des exemples.