Programme de la colle 15

Semaine du lundi 19 au vendredi 23 janvier 2026

Liste des questions de cours :

- Définition de X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
- Absence de mémoire d'une variable de loi géométrique + démonstration (groupe $*$).
- Définition de X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
- Approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale.
- Loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes, obtention des lois marginales.
- Lois conditionnelles.
- Indépendance de deux variables aléatoire, d'une famille de variables aléatoires, d'une suite de variables aléatoires.
- Transfert d'indépendance, lemme des coalitions.
- Stabilité de la loi binomiale (cas $n = 2$ ou cas général) + démonstration (groupe $*$).
- Stabilité de la loi de Poisson (cas $n = 2$ ou cas général) + démonstration (groupe $*$).
- Définition d'une norme et d'un espace vectoriel normé.
- Inégalités triangulaires.
- Définition d'un produit scalaire et d'un espace préhilbertien réel.
- Définition de la norme euclidienne associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Définition de la distance associée à une norme et propriétés.
- Définition de partie bornée, application bornée, suite bornée.
- Définition de $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$.
- Définition de N_1 et N_2 normes équivalentes sur E.

On se limitera à des exemples simples pour les espaces vectoriels normés (notion pas encore abordée en TD). On pourra demander de prouver qu'une application définit une norme sur un espace vectoriel de référence.

Chapitre 8c : Variables aléatoires discrètes - lois discrètes usuelles

Attention : pas d'espérance ni de variance dans ce chapitre.

- Variables aléatoires discrètes : définition, notations $(X = x)$ et $(X \in A)$, indicatrice d'un événement.
  Loi de probabilité d'une variable aléatoire, système complet d'événements associé à une variable aléatoire, caractérisation de la loi à l'aide de la distribution de probabilité $(P(X = x))$,
  variable aléatoire presque sûrement constante, notion de variables qui suivent la même loi (pas nécessairement égales).
  Variables aléatoires définies comme fonctions d'une autre variable aléatoire, loi de $f(X)$, propriétés.

- Lois discrètes usuelles :
  Loi uniforme sur un ensemble E : définition, simulation en `Python`.
  Loi de Bernoulli : définition, simulation en `Python`.
  Loi binomiale : définition, schéma de Bernoulli (situation type), simulation en `Python`.
  Loi géométrique : définition, situation type, calcul de $P(X > k)$, absence de mémoire, simulation en `Python`.
  Loi de Poisson : définition, approximation par une loi binomiale.

Chapitre 8d : Couples variables aléatoires discrètes - indépendance

- Couples de variables aléatoires discrètes : système complet d'événement associé à un couple de variables aléatoires discrètes, loi conjointe, lois marginales, obtention des lois marginales à partir de la loi conjointe, lois conditionnelles, liens entre les différentes lois.
  Extension au n-uplets de variables aléatoires.

— Indépendance de variables aléatoires : cas de deux variables aléatoires, transfert d'indépendance (X et Y indépendantes $\Rightarrow f(X)$ et $g(Y)$ indépendantes).
Cas d'une famille finie de variables aléatoires discrètes, cas des sous-familles, transfert d'indépendance, lemme des coalitions.
Suite de variables aléatoires discrètes, notion de suite de variables i.i.d.

— Variables de la forme u(X,Y) : loi, cas de la somme de deux variables aléatoires discrètes, stabilité des lois binomiale et de Poisson.
Généralisation à la somme de n variables aléatoires discrètes, stabilité des loi binomiale et de Poisson.
Recherche de la loi d'un minimum et d'un maximum sur des exemples.

Chapitre 9a : Espaces vectoriels normés

— Normes sur un espace vectoriel : définition, inégalités triangulaires,
cas des espaces préhilbertiens réels : norme euclidienne associée à un produit scalaire,
exemples d'espaces vectoriels normés : $\mathbb{K}^n$, E de dimension n, $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
distance associée à une norme : définition et propriétés,
parties bornées, applications et suites bornées, norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{B}(I,E)$ des applications bornées de I dans E, lien avec la convergence uniforme des suites et séries de fonctions.

— Suites dans un e.v.n : convergence d'une suite, propriétés (unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, opérations sur les suites convergentes, suites extraites.

— Comparaison des normes : normes équivalentes, conservation du caractère borné d'une partie, de la convergence d'une suite, en dimension finie les normes sont équivalentes, suites coordonnées d'une suite à valeurs dans un e.v.n de dimension finie muni d'une base, caractérisation de la convergence par la convergence des suites coordonnées.