Programme de la colle 18

Semaine du lundi 9 au vendredi 13 février 2026

Liste des questions de cours :

— Lemme d'Abel.
— Définition du rayon de convergence d'une série entière.
— Convergence de $\sum a_n z^n$ selon que $|z| < R$ ou $|z| > R$.
— Théorème de d'Alembert pour les séries entières.
— Rayon de convergence de la somme de deux séries entières.
— Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières.
— Convergence normale (sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence).
— Continuité de la somme (série entière de la variable réelle).
— Primitivation terme à terme (série entière de la variable réelle).
— Classe $\mathcal{C}^1$ de la somme et dérivation terme à terme (série entière de la variable réelle).
— Classe $\mathcal{C}^\infty$ de la somme et dérivation terme à terme (série entière de la variable réelle).
— DSE usuels.

Chapitre 10 : Séries entières

— Séries entières et rayon de convergence :
Définition, lemme d'Abel, rayon de convergence, comportement de la série selon que $|z| < R$ ou $|z| > R$, disque ouvert de convergence (variable complexe), intervalle ouvert de convergence (variable réelle).
Relations de comparaison ($|a_n| \leqslant |b_n|$, $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, $a_n \sim b_n$, $a_n = nb_n$) et rayon de convergence,
Utilisation de la règle de d'Alembert : pour les séries entières tq a_n non nul à partir d'un certain rang, ou pour les séries numériques lorsque la série entière est lacunaire (préciser $|z| \neq 0$).
Opérations sur les séries entières : somme, cas des séries entières paires et impaires, produit de Cauchy de deux séries entières.

— Propriétés de la somme d'une série entière de la variable réelle :
Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle de convergence.
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
Primitivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence.
Classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^\infty$, Dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

— Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction de la variable réelle :
Fonction développable en série entière (DSE) en 0 ou sur $]-r, r[$, opérations sur les fonctions DSE en 0 : combinaisons linéaires, produit, primitives et dérivées successives.
Développement en série entière et série de Taylor : série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sir $]-r, r[$; si f est DSE alors f est de $\mathcal{C}^\infty$ et sa série entière coïncide avec sa série de Taylor, en revanche si f est de $\mathcal{C}^\infty$, rien n'assure la convergence de sa série de Taylor, ni le fait que sa somme soit égale à f, Formule de Taylor avec reste intégral : l'étude du reste d'ordre n permet de montrer que la série de Taylor converge et que sa somme est f.
Unicité du développement en série entière, caractérisation des fonctions DSE paires, impaires.
DSE classiques : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $x \mapsto \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, arctan, exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).