

Programme de la colle 20

Semaine du lundi 16 au vendredi 20 mars 2026

Liste des questions de cours :

- Définition de X est d'espérance finie.
- Théorème de transfert.
- Propriétés de l'espérance : inégalité triangulaire, linéarité, positivité et croissance, théorème de comparaison, espérance d'un produit de variables indépendantes
- Notion de variable aléatoire centrée, de variable aléatoire centrée associée à X .
- Définition de X est de variance finie.
- Formule de König-Huygens.
- $V(aX + b)$, $V(X + Y)$.
- Espérances et variances des variables de lois usuelles.
- Définition de la covariance.
- Propriétés de la covariance.
- Formule de König-Huygens pour la covariance.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Lien entre indépendance et non corrélation.
- Inégalité de Markov.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres + démo (groupe *)
- Définition de la fonction génératrice de X variable aléatoire discrète + propriétés de continuité et dérivabilité + démo (groupe *).
- Fonctions génératrices des variables de lois usuelles + démo
- Lien entre la dérivabilité de G_X et X est d'espérance finie.
- Lien entre la dérivabilité seconde de G_X et X est de variance finie.
- Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes + démo (groupe *).
- Utilisation des fonctions génératrices pour montrer la stabilité des lois binomiales, lois de Poisson (groupe *).

Remarque : pas de questions de cours pour les intégrales à paramètres, la connaissance du cours se voit directement sur les exercices.

Chapitre 11a : Espérance, variance et covariance

- Espérance d'une variable discrète positive (qui peut être finie ou infinie), définition de variable aléatoire discrète réelle ou complexe d'espérance finie.
Expression $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$ pour X à valeur dans $\mathbb{N}$.
Théorème de transfert, cas d'un couple de variables aléatoires discrètes et application au calcul de $E(XY)$.
- Propriétés de l'espérance : inégalité triangulaire, linéarité, positivité et croissance, théorème de comparaison, espérance d'un produit de variables indépendantes.
Notion de variable aléatoire centrée, de variable aléatoire centrée associée à X .
- Variance : Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie.
Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie, inégalité de Cauchy-Schwarz.
Définition de X est de variance finie, formule de König-Huygens, $V(aX + b)$, écart-type, variable aléatoire centrée réduite, variable aléatoire centrée réduite associée à une variable X de variance finie non nulle.

- Espérances et variances des variables aléatoires suivant des lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson.
- Covariance : définition pour des variables de variance finie, formule de König-Huygens, propriétés de la covariance (bilinearité, symétrie, lien avec la variance), inégalité de Cauchy-Schwarz, variance d'une somme de variables aléatoires de variance finie, variables aléatoires non corrélées, lien avec l'indépendance.

Chapitre 11b : Inégalités probabilistes, fonctions génératrices

- Inégalités en probabilité : inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres. Notion de moyenne empirique, interprétation de la loi faible des grands nombres. Application : détermination d'une valeur approchée d'une espérance ou d'une probabilité.
- Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète : définition, G_X est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et continue sur $[-1, 1]$.
Caractérisation de la loi à l'aide de la fonction génératrice : $P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
Fonctions génératrices des variables aléatoires discrètes de lois usuelles : Bernoulli, binomiale, géométrie, Poisson.
Lien avec l'espérance et la variance :
 - X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et, dans ce cas : $E(X) = G'_X(1)$.
 - X est de variance finie ssi G_X est deux fois dérivable en 1 et, dans ce cas :
 $E(X(X-1)) = G''_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.
- Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Chapitre 12 : Intégrales à paramètre

Remarque : les arguments de continuité par morceaux ne sont pas exigibles d'après le programme officiel.

Pour $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$, on pose : $g(x) = \int_I f(x, t) dt$.

- Théorème de définition et continuité d'une intégrale à paramètre g : domination sur A ou sur toute famille de segments de A qui recouvre A .
- Théorème de convergence dominée à paramètre continu (limite de g en une borne de A) : on peut se restreindre à un intervalle dont l'une des bornes est la borne considérée pour la limite.
- Théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre g , théorème de la classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$: domination sur A ou sur toute famille de segments de A qui recouvre A .
- Exemple de la fonction Γ .