Programme de la colle 22

Semaine du lundi 30 mars au vendredi 3 avril 2026

Liste des questions de cours :

— Théorème de Pythagore.
— Caractérisation de l'orthogonal d'un Vect.
— Définition de famille orthogonale, orthonormée et caractérisation matricielle.
— Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n d'un espace euclidien.
— Expression du produit scalaire et de la norme dans une b.o.n.
— Définition et caractérisation utile de la projection sur F sous-espace de E de dimension finie (+ dessin !).
— Dans un espace euclidien : lien entre p_F et $p_{F^\perp}$ (+ dessin).
— Écriture du projeté orthogonal dans une b.o.n + démo (groupe $*$).
— Distance à un sous-espace vectoriel, théorème de projection (+ dessin).
— Définition d'une isométrie vectorielle.
— Caractérisations des isométries vectorielles.
— Définition d'une symétrie orthogonale et lien avec la projection orthogonale (+ dessin).
— Définition et caractérisations des matrices orthogonales.
— Déterminant et spectre d'une matrice orthogonale + démo (groupe $*$).
— Définition du groupe spécial orthogonal et propriétés.
— Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$.
— Caractérisation des isométries directes dans une b.o.n directe.
— Caractérisation des isométries directes dans une b.o.n.
— Définition d'endomorphisme autoadjoint.
— Caractérisation des projections et symétries orthogonales.
— Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints.
— Les sous-espaces propres de $f \in S(E)$ sont deux à deux orthogonaux + démo (groupe $*$).
— Théorème spectral : version endomorphisme autoadjoint ou matrice symétrique réelle.
— Définition et caractérisation d'un endomorphismes symétrique positif (*resp.* défini positif) + démo (groupe $*$).
— Définition et caractérisation d'une matrice symétrique positive (*resp.* définie positive) + démo (groupe $*$).
— Définition et caractérisation de la dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point.
— Dérivabilité de la composée par une application linéaire, bilinéaire, multilinéaire.

Chapitre 13a : Révisions sur les espaces préhilbertiens réels

Soit E un espace préhilbertien.

— Orthogonalité : définition, théorème de Pythagore,
Orthogonal d'une partie A de E : $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel E, si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$, caractérisation de l'orthogonal d'un Vect.

— Familles orthogonales, orthonormées (ou orthonormales), caractérisation matricielle : si $A = \mathrm{Mat}(x_1, \dots, x_p)$, alors $A^\top A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Toute famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre, généralisation du théorème de Pythagore.
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

— Base orthonormée d'un espace euclidien, existence, théorème de la base orthonormée incomplète, coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, calcul du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

— Définition de $F \perp G$, tout sous-espace vectoriel F de dimension finie est tel que $E = F \oplus F^\perp$, conséquence sur les dimensions dans le cas E euclidien et conséquence : $(F^\perp)^\perp = F$.

— Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, dessin (impératif), théorème de Pythagore, lien entre p_F et $p_{F^\perp}$ dans le cas E euclidien. Caractérisation utile : $y = p_F(x) \iff y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.
Écriture du projeté orthogonal dnas une base orthonormée, ou simplement orthogonale. Cas de la projection sur une droite, sur un plan.
Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie : définition et théorème de projection.

Chapitre 13b : Endomorphismes d'un espace euclidien

— Isométries vectorielles : définition (conservation de la norme), notation $f \in O(E)$, et caractérisations : conservation du produit scalaire, l'image d'une b.o.n est une b.o.n. Toute isométrie est un automorphisme.
Étude des symétries orthogonales : définition, lien avec la projection orthogonale, toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle (ce qui n'est pas le cas d'une projection orthogonale en général).
Propriétés des isométries vectorielles : id_E est une isométrie, la composée de deux isométries est une isométrie, la réciproque d'une isométrie est une isométrie. Si $f \in O(E)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$, si F est stable par f, alors $f^\perp$ l'est aussi.

— Matrices orthogonales : définition, notation $A \in O_n(\mathbb{R})$, caractérisations. f est une isométrie si, et seulement si, sa matrice dans une b.o.n est orthogonale.
Propriétés des matrices orthogonales : I_n est orthogonale, le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale, l'inverser (donc la transposée) d'une matrice orthogonale est orthogonale.
Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$ et $\det(A) = \pm 1$. Si $f \in O(E)$, alors $\det(f) = \pm 1$.
Groupe spécial orthogonal, stabilité par composition et passage à l'inverse.
Orientation d'un espace euclidien : deux bases ont la même orientation si la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale directe.

— Isométries vectorielles du plan : description de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$, matrices de rotation $R(\theta)$.
$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1)$, en particulier $R(\theta)$ est inversible d'inverse $R(-\theta)$.
Isométries directes du plan : la matrice est de la forme $R(\theta)$ quelle que soit la b.o.n directe choisie, rotation vectorielle, angle de la rotation, mesure d'un angle oritenté de vecteurs non nuls.
Isométrie indirectes du plan : réflexion par rapport à la droite des invariants $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
Décomposition d'une rotation en composée de deux réflexion dont l'une des deux peut-être choisie arbitrairement.

— Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) : notation $f \in S(E)$. $S(E)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Caractérisation des projections et des symétries orthogonales, caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints dans une b.o.n. Dimension de $S(E)$.

— Si F est stable par $f \in S(E)$, alors $F^\perp$ l'est aussi. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.
Théorème spectrale : pour un endomorphisme autoadjoint ou une matrice symétrique réelle.

— Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs, caractérisations en termes de spectre.
Matrices symétriques positives, définies positives, caractérisations en termes de spectre.

Chapitre 14a : Équations différentielles (révisions) - fonctions vectorielles

— Rappels sur les EDL1 : forme résolue sur un intervalle I, structure de l'ensemble des solutions, résolutions de l'équation homogène associée, recherche d'une solution particulière par variation de la constante, principe de superposition, théorème de Cauchy linéaire d'ordre 1.

— Rappels sur les EDL2 à coefficients constants : structure de l'ensemble des solutions, résolutions de l'équation homogène associée (cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre sous la forme $P(x)$, $A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $A\cos(\omega x)$ ou $A\sin(\omega x)$, principe de superposition, théorème de Cauchy linéaire d'ordre 2. Lorsque les coefficients ne sont pas constants, on guidera la résolution (changement de variable, fonction auxiliaire).

— Fonctions vectorielles : dérivabilité en un point, caractérisation à l'aide d'un DL à l'ordre 1, caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées (cas des fonctions à valeurs complexes). Fonction dérivée, calcul à partir des fonctions coordonnées, caractérisation des fonctions constante sur un intervalle I.
Opérations sur les fonctions dérivables : linéarité, composition par une application linéaire $(L \circ f)' = L \circ f'$, par une application bilinéaire (cas d'un produit scalaire), ou multilinéaire (cas du déterminant), dérivabilité d'une composée à droite, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
Application à la résolution de systèmes linéaires (changement de fonctions $Y(t) = P^{-1}X(t)$ sans calculer P^{-1}).