# Intégration

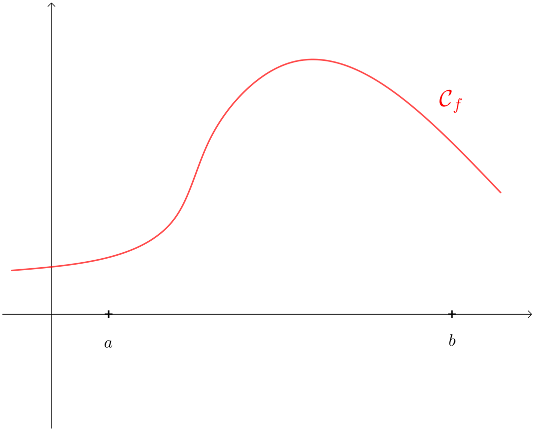
Keven Commault

Lycée Brizeux

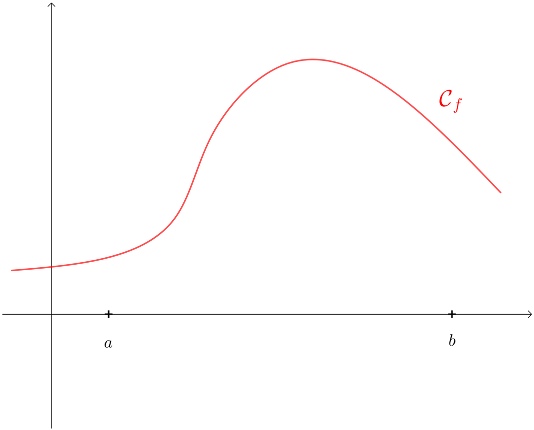
17 mars 2020

- Qu'est-ce qu'une intégrale ?

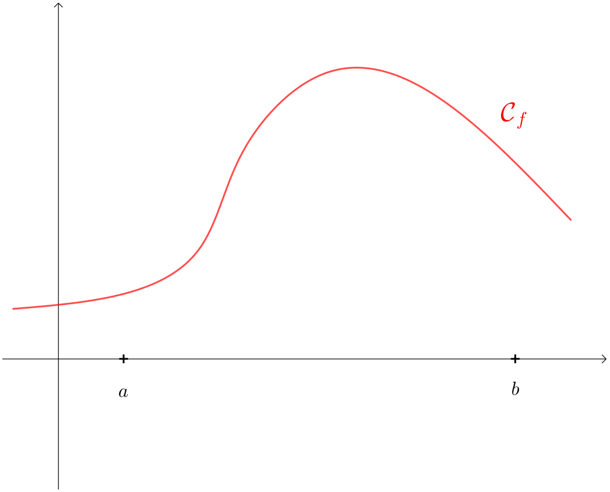
- Qu'est-ce qu'une intégrale ?



- Qu'est-ce qu'une intégrale ?




- Qu'est-ce qu'une surface ? Comment la calculer ?


$\mathcal{C}_f$
$a$
$b$

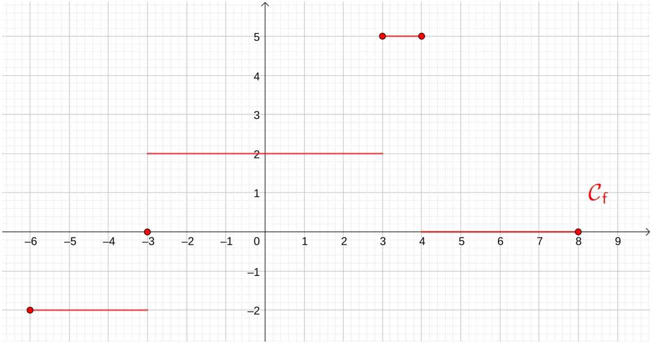
- Subdivision de l'intervalle $[a; b]$ :

- Subdivision de l'intervalle $[a; b]$ :
  des réels $(x_i)_{[\![0;n]\!]}$ tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

- Subdivision de l'intervalle $[a; b]$ :
  des réels $(x_i)_{[\![0;n]\!]}$ tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- Fonction en escalier (relativement à une substitution) :

- Subdivision de l'intervalle $[a; b]$ :
des réels $(x_i)_{[\![0;n]\!]}$ tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- Fonction en escalier (relativement à une substitution) :
une fonction $f : ]a; b[ \to \mathbb{R}$ constante sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ de la subdivision.

- Subdivision de l'intervalle $[a; b]$ :
  des réels $(x_i)_{[\![0;n]\!]}$ tels que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- Fonction en escalier (relativement à une substitution) :
  une fonction $f : ]a; b[ \to \mathbb{R}$ constante sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ de la subdivision.

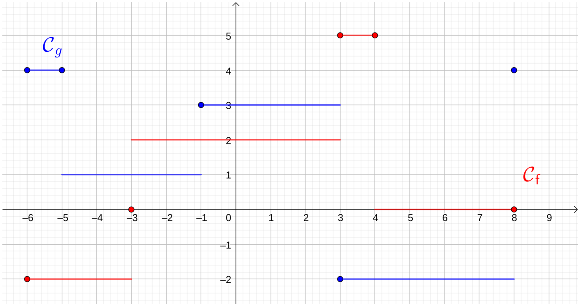


Des propriétés *simples* :

- Si $f$ est en escalier par rapport à la subdivision $s$ alors c'est toujours le cas si on rajoute un nombre fini de points à $s$.

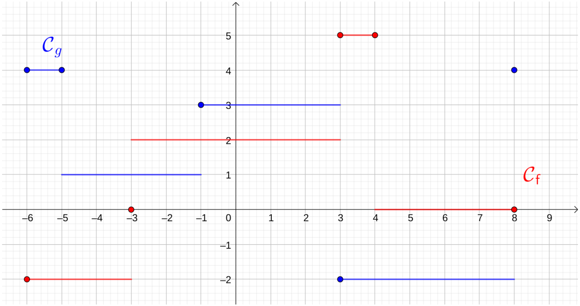
Des propriétés *simples* :

- Si $f$ est en escalier par rapport à la subdivision $s$ alors c'est toujours le cas si on rajoute un nombre fini de points à $s$.
- Si $f$ et $g$ sont en escalier sur $[a; b]$, il existe une subdivision adaptée <u>simultanément</u> à $f$ et $g$.



Des propriétés *simples* :

- Si $f$ est en escalier par rapport à la subdivision $s$ alors c'est toujours le cas si on rajoute un nombre fini de points à $s$.
- Si $f$ et $g$ sont en escalier sur $[a;b]$, il existe une subdivision adaptée <u>simultanément</u> à $f$ et $g$.




- L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$ est un SEV de $\mathbb{R}^{[a;b]}$.

Une qualité remarquable :

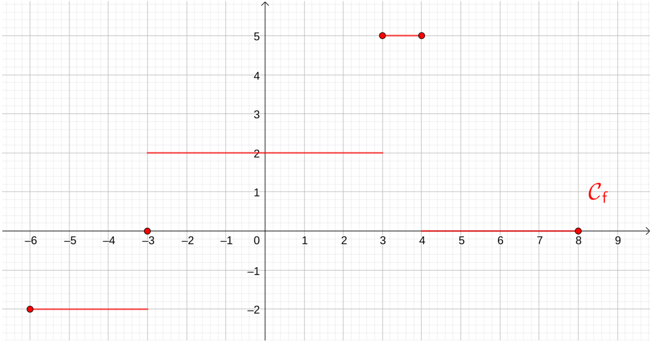
Une qualité remarquable :

$\boxed{\text{Il est facile de définir l'intégrale d'une fonction en escalier}}$

Une qualité remarquable :

$\boxed{\text{Il est facile de définir l'intégrale d'une fonction en escalier}}$

La surface est la somme d'aires de rectangles :



Si $f$ est en escalier relativement à $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ alors on définit :

$$\int_{[a;b]} f \ =$$

De la définition et des propriétés vues, l'intégrale des fonctions en escalier tire les propriétés usuelles de l'intégrale :

De la définition et des propriétés vues, l'intégrale des fonctions en escalier tire les propriétés usuelles de l'intégrale :

- Linéarité.

De la définition et des propriétés vues, l'intégrale des fonctions en escalier tire les propriétés usuelles de l'intégrale :

- Linéarité.
- Positivité et croissance.

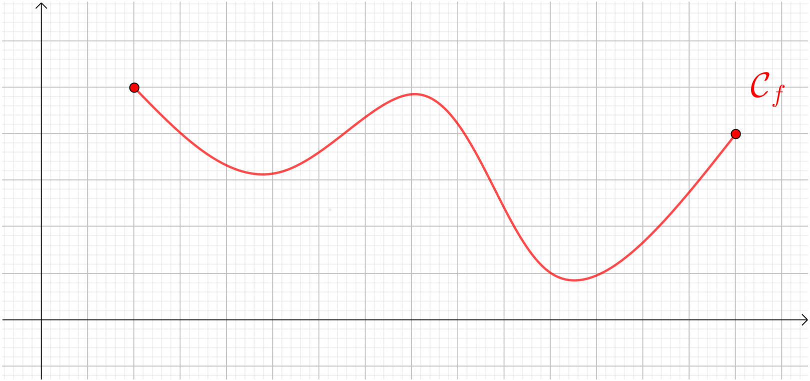
De la définition et des propriétés vues, l'intégrale des fonctions en escalier tire les propriétés usuelles de l'intégrale :

- Linéarité.
- Positivité et croissance.
- Relation de Chasles.

On connait les fonctions continues.
Comment leur **étendre** la notion d'intégrale ?

On connait les fonctions continues.
Comment leur **étendre** la notion d'intégrale ?

Théorème :
Si $f$ est continue sur $[a; b]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier $g$ sur $[a; b]$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.


$\mathcal{C}_f$

Le théorème précédent suffit-il ?

Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a; b])$, on introduit deux familles de fonctions en escalier sur $[a; b]$ :

- $E^+$ : celles qui sont $\geq f$ ;
- $E^-$ : celles qui sont $\leq f$.

Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a;b])$, on introduit deux familles de fonctions en escalier sur $[a;b]$ :

- $E^+$ : celles qui sont $\geq f$ ;
- $E^-$ : celles qui sont $\leq f$.

On montre que

$$\inf \left\{ \int_{[a;b]} g / g \in E^+ \right\} = \sup \left\{ \int_{[a;b]} g / g \in E^- \right\}$$

Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a;b])$, on introduit deux familles de fonctions en escalier sur $[a;b]$ :

- $E^+$ : celles qui sont $\geq f$ ;
- $E^-$ : celles qui sont $\leq f$.

On montre que

$$\inf \left\{ \int_{[a;b]} g / g \in E^+ \right\} = \sup \left\{ \int_{[a;b]} g / g \in E^- \right\}$$

Cette quantité commune est la définition de $\displaystyle\int_{[a;b]} f$.

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sont obtenues en revenant systématiquement aux fonctions en escalier dans les preuves.

Intégrer sur un intervalle non borné ?

Intégrer sur un intervalle non borné ?

Définir l'intégrale de façon différente ?