Intégration (3) - Riemann, Taylor

Keven Commault

Lycée Brizeux

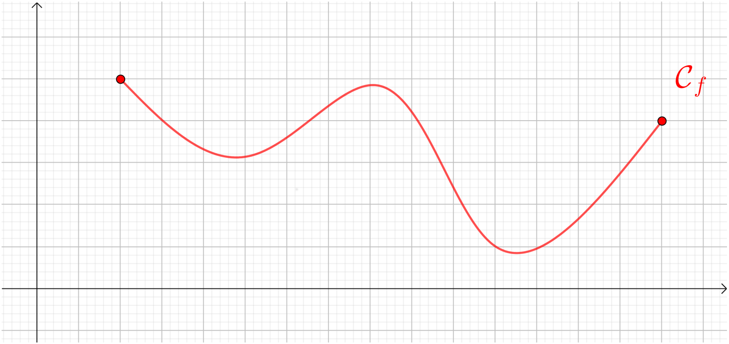
22 mars 2020

Deux compléments : valeur moyenne, fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Sommes de Riemann

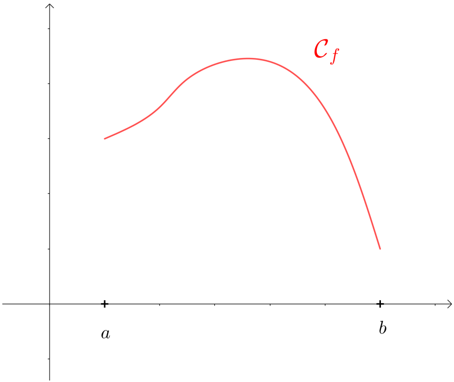
Formules de Taylor

Valeur moyenne d'une fonction.



Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b])$.



Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle somme de Riemann d'ordre n :

Théorème

$$S_n(f)$$

Théorème

$$S_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème

$$S_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Application : méthode des rectangles (à gauche)

On a déjà vu

On a déjà vu la formule de **Taylor Young** :

On a déjà vu la formule de **Taylor Young** :

Si $f \in \mathcal{C}^n$ alors :

$$\boxed{f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)}$$

On a déjà vu la formule de **Taylor Young** :

Si $f \in \mathcal{C}^n$ alors :

$$\boxed{f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n)}$$

On ne l'a pas démontrée. Elle est une conséquence d'une formule de Taylor plus forte, qui explicite le reste « $o(h^n)$ ».

Formule de **Taylor avec reste intégral** :

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b])$ alors,

$$\boxed{f(b) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \ + \ \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t}$$

Démonstration : récurrence sur n.
Pour $n = 0$: si $f \in \mathcal{C}^1$ alors :

Supposons que la formule de Taylor avec reste intégral fonctionne pour $n \in \mathbb{N}$, montrons que c'est le cas pour $n+1$, c'est-à-dire :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \; + \; \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Inégalité de Taylor Lagrange :

si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b])$ alors,

$$\boxed{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a;b]} \left| f^{(n+1)} \right|}$$

Démonstration :