PSI **Novembre 2016**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Réduction

Exercice 1. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. Résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2. On note $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Est-ce que A est diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.

1. Donner une CNS pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.
2. Si A est diagonalisable, donner un polynôme de degré 2 annulateur de A.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A^2(A - I_3)^4 = 0$.

1. Montrer que $B = A(A - I)$ est nilpotente.
2. Montrer que $A^3(A - I_3)^3 = 0$.

Exercice 6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 +^t M = 2I_n$. Démontrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Pour $n \geq 2$, on considère la matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer χ_C puis montrer que C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et la diagonaliser.
2. Calculer C^n et retrouver le résultat précédent.

3. Pour $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on définit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$

   Exprimer A comme un polynôme en C.
4. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A et diagonaliser A.
5. Calculer $\det(A)$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $det(I_n + N) = 1$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.
Montrer que n est pair, $tr(A) = 0, det(A) = 1$.

Exercice 10. (CCP 2015)
Soit $x_0 \in E$ et ϕ une forme linéaire non nulle de E, $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

1. Montrer que u, défini par $u(x) = x + \phi(x)x_0$ est un endomorphisme admettant 1 pour valeur propre.
2. Donner la dimension de $\operatorname{Ker}(u - id)$ puis une CNS pour que u soit diagonalisable.

Exercice 11. (CCP 2015)

1. Montrer que Φ défini par $\Phi(M) = M + tr(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on donnera le noyau et le rang.
2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de Φ.
3. Φ est-il diagonalisable ? Bijectif ? Si oui, calculer Φ^{-1}.

Exercice 12. (CCP 2015)
Montrer qu'un endomorphisme de rang 1 d'un espace de dimension finie est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 13. (CCP 2015)
Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si M^2 l'est. Est-ce toujours vrai si M n'est pas inversible ?

Exercice 14. (Mines)
Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.