PSI **Décembre 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Réduction d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Exercice 1. *Pour vous entraîner en calcul* Parmi ces matrices, quelles sont celles qui sont diagonalisables. Si oui, la diagonaliser.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_1}(X) = (X-1)^3$, $E_1(A_1) = Vect((1,-2,1)$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_2}(X) = X(X-1)(X-2)$, $E_0(A_2) = Vect((1,-1,1))$, $E_1(A_2) = Vect((0,1,0))$, $E_2(A_2) = Vect((-1,1,1))$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_3}(X) = (X-4)(X-1)^2$, $E_1(A_3) = Vect((-1,1,0),(-1,0,1))$, $E_4(A_3) = Vect((1,1,1),$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_4}(X) = (X-1)(X-2)^2$, $E_1(A_4) = Vect((4,-4,1))$, $E_2(A_4) = Vect((2,-3,1))$.
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_5}(X) = (X+1)(X-1)^2$, $E_{-1}(A_5) = Vect(1/2{*}a,-1,1)$, $E_{-1}(A_5) = Vect((1,0,0))$.

Exercice 2. (CCINP PSI 2021) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle inversible ?

Exercice 3.

1. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Diagonaliser p.

Exercice 4.

1. Déterminer sans calcul de déterminant les valeurs propres de : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. Résoudre l'équation matricielle : $M^2 = A$ où $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
4. Donner une CNS de diagonalisabilité pour une matrice de rang 1

Exercice 5.
1. Justifier sans calcul que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
2. Trouver l'espace $\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Donner une base .

Exercice 6. (IMT-CCMP 2021) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $\Psi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{tr}\,(A)M + \mathrm{tr}\,(M)A$.

1. Ψ est-il diagonalisable ?
2. Donner le polynôme caractéristique et la trace de Ψ.

Exercice 7. (CCINP 2021) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j^2 & j & 1 \\ j & 1 & j^2 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
2. Donner le spectre de A. Calculer A^2. Que peut-on en déduire entre $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$?
3. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Soit $\varphi : M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto AMA$. Déterminer l'image de φ et son spectre.

Exercice 8. (IMT 2021) Soient E un $\mathbb{C}-$e.v de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathscr{L}(E)$ tq : $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f_a(e_2) = 0$.

1. Donner une base de l'image et du noyau de f_a.
2. Donner la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).
3. Déterminer A^2. Qu'en déduire ?
4. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ? bijectif ?

Exercice 9. (CCINP 2021) Soit $n \geqslant 3$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$définie par $a_{1j} = j$ pour $1 \geqslant j \geqslant n$ et $a_{i1} = i$ pour $1 \geqslant i \geqslant n$ et des 0 ailleurs.

1. Quel est le rang de A ? $\dim \operatorname{Ker} A$?
2. A est-elle diagonalisable ? Que dire de la multiplicité de la vp nulle ?
3. Montrez que $\mathrm{Sp}A = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$ avec $\lambda > 1$.
4. Donnez un polynôme de degré 3 annulateur de A.

Exercice 10.
1. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que, si A inversible, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. On admet que le résultat reste valable pour A quelconque.
2. Soient f et g 2 endomorphismes d'un ev E de dim. finie n. On note E_λ et K_λ les sous-espaces propres de $f \circ g$ et $g \circ f$ associés à λ. Soit λ une vp non nulle de $f \circ g$. Montrez que λ est vp de $g \circ f$ puis $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que F_λ et E_λ ont même dimension.

Exercice 11. (EIVP-ENTPE 2015)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que si $A^2 + A + I_n = 0$ alors n est pair et si $A^3 + A^2 + A = 0$ alors rg(A) est pair.

Exercice 12. (CCINP 2021)
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. telle que $M^4 = 4M^2$ et 2 et-2 sont valeurs propres de M.

1. On suppose M non inversible. Montrez $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 2, -2\}$.
2. Montrez M diagonalisable.

Exercice 13. (Centrale PSI 2021)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle quetr $A = 0$ et $\operatorname{tr} A^2 \neq 0$. Montrez A diagonalisable.
2. Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\operatorname{tr} A^k = 0$ pour tout $k \in \{1, .., n-1\}$ et $\operatorname{tr} A^n \neq 0$. Montrez A admet une vp non nulle puis que A est diagonalisable. *Ind : Notez $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les vp non nulles distinctes, de multiplicités $n_1, \cdots, n_p$ et considérez une matrice de Vandermonde.*

Exercice 14. (Mines Pont PSI 2021) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrez existence et unicité d'un n-uplet $(p_0, ..., p_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $u^n(x_0) = p_0 x_0 + p_1 u(x_0) + + p_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.
2. Montrez $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$ annule u. Montrez si Q annule u, alors Q est multiple de P.
3. En déduire C N S pour que u soit diagonalisable.
4. On note $\mathbb{K}[u] = \{Q(u), Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Déterminez $\dim \mathbb{K}[u]$
5. Montrez que le Commutant de u est $\mathbb{K}[u]$.

Exercice 15. (CCINP 2021)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?

2. Montrez A semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouvez cette expression en observant que $A = I_3 + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 16. Soit N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(I_n + N) = 1$