Mathématiques
Résultats de Cours
PC

année 2019-2020

M. Roger
lycée A. Brizeux

CPGE Brizeux Quimper

année 2019-2020

Table des matières

Chapitre I Intégrales généralisées

Définition 1 (Intégrale de Riemann).

Pour $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ on appelle **intégrale de** f sur le segment $[a,b]$ le nombre noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, ou $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, défini par :

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)$$

Théorème 1 (théorème fondamental du calcul intégral).

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathcal{CM}(I,F)$.
i) l'application $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
ii) Pour toute primitive H de f sur I, et tout $x \in I$, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = H(x) - H(a)$.
iii) Si <u>f est $\mathcal{C}$</u>, alors $\forall a, x \in I$, $\boxed{f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$.

Définition 2 (Intégrale impropre convergente sur $[a,+\infty[$).

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a+\infty[,\mathbb{K})$ on dit que **l'intégrale généralisée** (impropre au voisinage de $+\infty$) de f sur $[a,+\infty[$ converge lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

Si tel est le cas, on note $\boxed{\displaystyle\int_a^{+\infty} f}$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ la valeur de cette limite. On dit qu'elle diverge sinon.

Proposition 2 (Intégrales de Riemann).

$\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\ \mathrm{d}t \text{ CV ssi } \boxed{\alpha > 1}}$;
$\forall \alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}$.
$\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{-\gamma}\ \mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$; $\forall \gamma < 1$, $\displaystyle\int_0^1 t^{-\gamma}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1-\gamma}$.

Proposition 3 (exponentielles).

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\ \mathrm{d}t \text{ CV ssi } \boxed{\beta > 0}}$;
$\forall \beta > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}$.

Définition 3 (Intégrale impropre convergente sur $[a,b[$).

Etant donnés deux réels a, b et $f \in \mathcal{C}^0([a,b[,\mathbb{K})$ on dit que **l'intégrale généralisée** (impropre en b) de f sur $[a,b[$ converge lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** : $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ la valeur de cette limite. On dit qu'elle diverge sinon.

Proposition 4 (logarithme).

$\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ converge et vaut $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t = -1}$.

Proposition 5 (positivité).

Soient $a < b$ et f appartenant à $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction **positive** intégrable. Alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.

Proposition 6 (CNS intégrabilité fonction positive sur $[a,+\infty[$).

Soient a réel et $f \in \mathcal{CM}([a+\infty[,\mathbb{R})$ **à valeurs positives**. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ CV ssi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est majorée.

Proposition 7 (absolument convergence implique CV).

Soient I un intervalle de bornes α et β, et $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f|$ CV, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ CV.

Définition 4 (Intégrale absolument convergente).

Pour I un intervalle (borné ou non) de bornes α et β, $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux, on dit que l'intégrale de f sur I est **ACV** si l'intégrale généralisée $\int_\alpha^\beta |f|$ CV.
Si l'intégrale de f sur I est **ACV**, on note $\int_I f$ ou $\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ sa valeur, et on dit que f est **intégrable** sur I.

Théorème 8 (de comparaison).

Soient $I = [a, b[$ un intervalle réel, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable sur I et si : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq |g(t)|$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
2. Si g est intégrable sur I et si : $|f(t)| \underset{t\to b^-}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
3. Si g est intégrable sur I et si : $f(x) \underset{t\to b^-}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Proposition 9 (Linéarité).

$\forall f, g \in \mathcal{CM}([a, b]),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \int_a^b \lambda f(t) + g(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

Proposition 10 (croissance).

Soient $a < b$ et f, g appartenant à $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et intégrables. Si $\forall t \in [a, b],\ f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

Proposition 11 (relation de Chasles).

Soient $a < b < c$ trois réels, et $f \in \mathcal{CM}([a, c], F)$ intégrable sur $[a, c]$. Alors $\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f$

Proposition 12 (CS de nullité d'une fonction).

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Si f est **continue intégrable** sur I et vérifie $\int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t = 0$, alors $f = \tilde{0}$.

Proposition 13 (Intégration par parties).

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t,$$
avec u, v $\mathcal{C}^1$

Théorème 14 (changement de variables bijectif).

Soient $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement monotone.
Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))\mathrm{d}u$ CV.
Si tel est le cas, alors $\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi'(u)f(\varphi(u))\mathrm{d}u}$
(A la physicienne : on pose $t = \varphi(u)$, on a $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$, et pour $a \leq t \leq b$, $\varphi^{-1}(a) \leq t \leq \varphi^{-1}(b)$)

Définition 5 (fonctions c.p.m. intégrables).

$$\mathcal{CML}^1(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K});\ \int_I |f| \text{ converge} \right\}$$

Définition 6 (fonction de carré intégrable).

$$\mathcal{CML}^2(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K});\ \int_I |f|^2 \text{ converge} \right\}$$

Proposition 15.

L'application $(f, g) \longmapsto < f|g > = \int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0L^2(I, \mathbb{R})$

Proposition 16 (inégalité de Cauchy-Schwarz).

$\forall f, g \in \mathcal{CML}^2(I, \mathbb{R})$,
$$\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_I g(t)^2\ \mathrm{d}t}$$

Proposition 17 (PCSI : Formule de Taylor avec reste intégral).

Soient I un intervalle réel, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $t, t_0 \in I$
$$f(t) = f(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u$$

Chapitre II Sommes directes, rappels euclidiens, continuité, limites

Définition 1 (Sous-espaces supplémentaires).

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dits **supplémentaires** si : $E = F \oplus G$
i.e. si : $\forall x \in E,\ \exists!(f,g) \in F \times G;\ x = f + g$

Proposition 1.

Soient F et G sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le propositions suivantes sont équivalentes :

i) $E = F \oplus G$

ii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$

Définition 2.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des s-e.v. de E. On appelle **somme** des sous-espaces-vectoriels $E_1, \dots, E_s$ le $\mathbb{R}$-e.v. noté $\sum_{i=1}^{s} E_i$ défini par :

$$\sum_{i=1}^{s} E_i = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_s;\ \forall i \in [\![1, s]\!],\ x_i \in E_i\}$$

Définition 3 (Somme directe).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $\sum_{i=1}^{s} E_i$ de sous-espaces-vectoriels est une **somme directe** si :

$$\forall (x_i)_{1 \leq i \leq s} \in \prod_{i=1}^{s} E_i,\ \left(0_E = \sum_{i=1}^{s} x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1, s]\!],\ x_i = 0_E\right).$$

Si tel est le cas, on note $\sum_{i=1}^{s} E_i = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$

Définition 4 (Décomposition en somme directe).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que E est en **somme directe** de $E_1, \dots, E_s$ si :

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_i)_{1 \leq i \leq s} \in \prod_{i=1}^{s} E_i;\ x = \sum_{i=1}^{s} x_i$$

Si tel est le cas, on note $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$

Définition 5 (Base adaptée à une somme directe).

Etant donnée E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $s \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives $(d_i)_{1 \leq i \leq s}$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$. On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est une **base adaptée** à cette somme directe si ses éléments sont dans cet ordre de la forme $((e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}), \dots, (e_{s,1}, \dots, e_{s,d_s}))$, avec pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ base de E_i.

Proposition 2.

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension **finie**, $n \in \mathbb{N}$, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Alors $\boxed{\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i).}$

Proposition 3 (CNS de somme directe).

Etant donnés p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots F_p$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on a : $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)}$

En outre, il y a égalité si est seulement si $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

Définition 6.

Une application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$ si $\forall y, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x; y + \lambda z > = < x; y > + \lambda < x; z >$ et $< x + \lambda y; z > = < x; z > + \lambda < y; z >$

Définition 7 (Produit scalaire).

L'application $< \bullet; \bullet >: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un <u>**produit scalaire**</u> réel si :

i) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{symétrique}}$
(i.e. $\forall v, w \in E, < w; v > = < v; w >$) ;

ii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$

iii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{positive}}$ (i.e. $\forall v \in E, < v; v > \geq 0$) ;

iv) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{définie}}$ (i.e. $\forall v \in E, (< v; v > = 0 \Rightarrow v = 0_E)$) ;

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel PCSI)).

E espace vectoriel muni du p.s. $<\bullet;\bullet>$. Alors $\boxed{\forall(u,v)\in E^2,\ |<u|v>|\leq\sqrt{<u|u>}\sqrt{<v|v>}}$
en particulier, si $\|\ \|: x\mapsto\sqrt{<x|x>}$, on a : $\boxed{\forall(u,v)\in E^2,\ |<u|v>|\ \leq\ \|u\|\ \|v\|}$.
En outre, il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Définition 8.

Si $<\bullet;\bullet>$ est un produit scalaire sur E on dit que l'application $\|\ \|: x\mapsto\sqrt{<x;x>}$ est
la **norme associée**

Proposition 5 (propriétés de la norme associée à un p.s.).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $<\ ;\ >$ et $\|\ \|$ la norme associée.
L'application $\|\ \|: E\to\mathbb{R}$ vérifie les propriétés (caractérisant une **norme**) :

i) $\forall x\in E,\ \|x\|\geq 0$ (positivité) ;
ii) $\forall x\in E,\ [\ \|x\|=0\ \Rightarrow x=0_E\ ]$ (séparation) ;
iii) $\forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ (homogénéité) ;
iv) $\forall(x,y)\in E^2,\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

Proposition 6 (propriétés de la norme associée à un p.s.).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $<\ ;\ >$ et $\|\ \|$ la norme associée.
Pour tous vecteurs u et v on a :

$$<u+v|u+v>=\|u\|^2+2<u|v>+\|v\|^2$$

$$<u-v|u-v>=\|u\|^2-2<u|v>+\|v\|^2$$

Définition 9.

Une famille $\mathcal{F}=(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de E, pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, est dite **orthogonale** si :
$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j\Rightarrow<x_i|x_j>=0$

Proposition 7.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème 8 (de Pythagore).

Soit $\mathcal{F}=(v_1,\dots,v_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. alors $\left\|\sum_{i=1}^{n}v_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|^2$.

Définition 10 (B.O.N.).

Une famille $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E est dite base orthonormée si elle est libre et génératrice et vérifie :

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\ <e_i|e_j>=\delta_i^j=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

Proposition 9 (coordonnées dans une b.o.n).

Si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E, $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n}y_je_j$ deux vecteurs de E de coordonnées respectives dans cette base $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{<x|y>=\sum_{k=1}^{n}x_k\ y_k}$$

$$\boxed{\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}}$$

Remarque 1. En posant $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, le calcul de $<x|y>=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\in\mathbb{R}$ s'identifie au calcul matriciel $X^TY=\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)\in\mathfrak{M}_{11}(\mathbb{R})$.

Proposition 10 (Algorithme de *Gram-Schmidt*).

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de vecteurs de E.
En posant, $\boxed{e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1}$, et pour i allant de 2 à n,
$\boxed{e_i' = f_i - \sum_{\ell=1}^{i-1} < e_\ell | f_i > e_\ell \text{ et } e_i = \frac{1}{\|e_i'\|} e_i'}$,
la famille $\boxed{\mathcal{B}_{GS} = (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base orthonormée}}$.
En outre $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_i)$.

Définition 11 (orthogonal d'un s.e.v.).

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace (vectoriel) **orthogonal** l'ensemble, noté $F^\perp$ défini par :
$F^\perp = \{y \in E;\ \forall x \in F,\ < x|y >= 0\}$.

Définition 12 (s.e.v. orthogonaux).

On dit deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **orthogonaux** si : $\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ < f|g >= 0$.

Proposition 11 (somme directe orthogonale).

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E **orthogonaux**, alors la somme $F+G$ est directe. On dit qu'elle est **directe orthogonale**, et on note $F+G = F \oplus G = F \oplus^\perp G$.

dém : Pour $x \in F \cap G$, on a $< x|x >= 0$, donc $x = 0_E$. □

Proposition 12 (projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie).

Soit $(E, <\ |\ >)$ un espace préhilbertien (réel, de dimension quelconque) et V un s.e.v. de E de **dimension finie**.
Pour tout $x \in E$, il **existe** un **unique** élément $y \in V$ tel que $x - y \in V^\perp$; il est noté $y = P_V(x)$ et est appelé **projeté orthogonal** de x sur V.
En outre, si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base <u>**orthonormale de** V</u>, alors

$$\boxed{P_V(x) = \sum_{j=1}^{n} < u_j|x > u_j.}$$

Proposition 13 (somme directe orthogonale).

Pour E de dimension finie, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\boxed{E = F \oplus^\perp F^\perp}$.
$\boxed{\dim(F^\perp) = \dim E - \dim(F)}$

Proposition 14 (inégalité de Bessel).

Si V un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de l'espace vectoriel E et $x \in E$ fixé.
Alors :

$$\forall x \in E,\ \|x\| \geq \|P_V(x)\|$$

De plus le vecteur $P_V(x)$ est l'unique vecteur $y_0 \in V$ tel que $\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$

Définition 13.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'application $\|\ \|$: $E \to \mathbb{R}$ est une <u>**norme**</u> si :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;
ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0\ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;
iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;
iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

Définition 14.

Deux normes N et $\tilde{N}$ sur E sont dites <u>équivalentes</u> si :

$$\exists A, B > 0;\ \forall x \in E,\ A\ \tilde{N}(x) \leq N(x) \leq B\ \tilde{N}(x)$$

Théorème 15 (Admis).

Toutes les normes sur E $\mathbb{R}$-e.v. de <u>**dimension finie**</u> sont <u>équivalentes</u>.

Définition 15 (limite de suite).

On dit qu'une suite $(X_n(x_{n,1}; \ldots; x_{n,p}))_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $F = \mathbb{R}^p$ converge vers $L(\ell_1; \ldots; \ell_p)$ si :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_{n,i} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_i$$

Notation 1. *Lorsqu'une suite vectorielle (X_n) converge vers une limite L, on note cela :* $\boxed{X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L}$

Théorème 16 (limite et coordonnées).

Dans E e.v.n. de dimension **finie** égale à p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell \iff \left(\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lim_{n \to +\infty} U_{n,i} = \ell_i\right),$$

où l'indice i désigne la $i$ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 17.

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 18.

Toute suite extraite d'une suite convergente converge, vers la même limite.

Proposition 19 (opérations sur les limites).

Si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X$, $Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} Y$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$\lambda X_n + Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda X + Y$

Définition 16 (Limite).

Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, D une partie de E, et $A \in E$ un point adhérent à D. Une application $f : E \to F$ **admet une limite** ℓ en A si :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall X \in D,}$

$\boxed{\|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon}$

Si tel est le cas on note cela $\displaystyle\lim_{X \to A,\ X \in D} f(X) = \ell$ ou $f(X) \xrightarrow[X \to A]{} \ell$

Proposition 20 (Caractérisation séquentielle).

f admet pour limite ℓ en a si et seulement si : pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite vectorielle $(f(u_n)) \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Proposition 21.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$- e.v. de dimension finie, $a \in E$, $b, c \in F$.
Si $f(X) \xrightarrow[X \to a]{} b$ et si $g(X) \xrightarrow[X \to a]{} c$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda g(X) + f(X) \xrightarrow[X \to a]{} \lambda c + b$$

Proposition 22.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$- e.v. de dimension finie, $a \in E$, $b \in F$, $c \in G$.
Si $f(X) \xrightarrow[X \to a]{} b$ et si $g(Y) \xrightarrow[Y \to b]{} c$, alors

$$g(f(X)) \xrightarrow[X \to a]{} c$$

Définition 17 (Continuité).

Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, D une partie de E, et $A \in E$ un point adhérent à D.
Une application $f : E \to F$ est dite **continue** en A si :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall X \in D,}$

$\boxed{\|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon}$

Théorème 23.

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \to & (f_1(x_1, \dots, x_p);\ \dots;\ f_n(x_1, \dots, x_p)) \end{array}$$

et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses composantes. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^p$ si et seulement si ses composantes le sont.

Définition 18.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$ défini par :

$$\boxed{B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}}$$

Définition 19.

Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **k-lipschitzienne** si : $\forall x, y \in E,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E$.

Théorème 24.

Si $f : E \to F$ est lipschitzienne, alors elle est continue sur E.

Chapitre III Séries numériques

Définition 1 (Sommes partielles).

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de ses **sommes partielles** par :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$$

Définition 2 (Série numérique, nature).

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles, on appelle **série numérique** de **terme général** u_n le couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_N)_{N\in\mathbb{N}})$, que l'on note $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.

Si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers une limite ℓ FINIE, on dit que la **série** $\sum u_n$ **converge**, et la valeur de la limite de cette suite est appelée **somme** de la série, et est notée $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n}$.

Si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles n'admet pas de limite FINIE, on dit que **la série** $\sum u_n$ **diverge**.

Proposition 1.

Soit (u_n) une suite à termes **réels positifs**.
Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si il existe une constante $M \geq 0$ telle que les sommes partielles sont majorées par M, i.e. ssi $\exists M \geq 0;\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{n=0}^{N} u_n \leq M$
.

Définition 3 (Reste).

Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ le **reste** d'ordre N, et on a : $R_N + S_N = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, en notant S_N la somme partielle d'indice N.

Proposition 2 (grossière divergence).

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$.
Par contraposée, si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge, on parle alors de **grossière divergence**.

Proposition 3 (séries géométriques).

$\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} a^n \text{ converge } \iff |a| < 1}$, auquel cas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

Proposition 4 (séries de Riemann).

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

Proposition 5 (comparaison de séries positives).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On a :
Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Définition 4 (absolue cvce série à termes réels ou complexes).

On dit que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si la série (positive) $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Proposition 6.

Toute série absolument convergente est convergente.

Proposition 7 (comparaison à une série positive).

Soient $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On a :

i) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

ii) Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0,\ v_n > 0$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est équivalente à la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

Proposition 8 (Comparaison série intégrale).

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue par morceaux**, **décroissante** et **positive**.
Alors

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq n_0} f(n) \text{ converge} \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

(c.à.d. la série et l'intégrale ont même nature : elles sont simultanément convergentes ou divergentes)

Proposition 9 (séries de Riemann).

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

Proposition 10 (Règle de d'Alembert).

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes **tous non nuls**.

— Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ et si $\ell \in [0, 1[$, alors la série numérique $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ est absolument convergente, donc convergente.

— Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite ℓ et si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ est (grossièrement) divergente.

— Si la suite $\left(\dfrac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 1$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ peut être convergente ou divergente.

Définition 5 (Série exponentielle).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la somme de la série absolument convergente $\sum_{n \geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est appelée **exponentielle de** z, et est notée $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

Proposition 11 (Critère spécial des séries alternées).

Supposons

1. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée (i.e. $((-1)^n u_n)$ a un signe constant) ;
2. la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
3. $\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$;

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge**.

En outre la suite (R_N) des restes est du signe de u_0, et $\forall N \in \mathbb{N},\ |R_N| \leq |u_{N+1}|$, où $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$

Théorème 12 (Formule de Stirling).

$$\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Théorème 13 (produit de Cauchy).

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont deux séries **absolument convergentes**, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p,q \in \mathbb{N};\ p+q=n} u_p v_q$ est aussi absolument convergent, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p}\right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$$

Chapitre IV Espaces vectoriels, applications linéaires

Définition 1.

Un sous-espace vectoriel F de l'espace vectoriel E est dit **stable** (ou invariant) par l'endomorphisme u appartenant à $\mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, i.e. : $\forall v \in F,\ u(v) \in F$.

Définition 2.

Si F est un sous-espace vectoriel F de E stable par l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit l'**endomorphisme induit** par u sur F, noté $u_{|F}^{|F}$, par :
$\forall v \in F,\ u_{|F}^{|F}(v) = u(v)$

Proposition 1.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
F est stable par l'endomorphisme u si et seulement s'il existe B, D telles que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} Mat_{\mathcal{B}_f}(u_{|F}^{|F}) & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Proposition 2.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

Proposition 3.

Si $u \circ v = v \circ u$ (i.e. si u et v commutent), alors tout sous-espace F stable par u est aussi stable par v.

Définition 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de A le scalaire, noté $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ou encore $\det A$ défini par :

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Définition 4.

Pour tout entier $n \geq 3$ on définit par récurrence le **déterminant** d'une matrice $n \times n$ en posant, pour tout $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{12} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1}) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1}\det(A_{n1})$ où pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en rayant dans A la ligne i et la colonne j.

Proposition 4 (Développement par rapport à la $j$ème colonne).

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

Proposition 5 (Développement par rapport à la $i$ème ligne).

$$\det A = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \det(A_{i\ell})$$

Proposition 6 (opération du pivot de Gauss sur les colonnes).

Si $A = (C_1|\dots|C_n)$, on ne change pas le déterminant en faisant une opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$, pour des scalaires $(\lambda_j)_{j \neq j}$.

Proposition 7 (multiplication d'une colonne par un scalaire).

Si $A = (C_1|\dots|C_n)$ et $B = (C_1|\dots|\lambda C_{i_0}|\dots|C_n)$ s'en déduit en faisant l'opération $C_{i_0} \leftarrow \lambda C_{i_0}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(B) = \lambda \det(A)$

Proposition 8 (transposée).

Pour toute matrice carrée A, on a : $\det(A^T) = \det(A)$

Proposition 9 (CNS liberté).

Pour toute matrice carrée $A = (C_1|\dots|C_n)$.
$\det(A) \neq 0$ si et seulement si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est libre dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible (i.e. si l'endomorphisme canoniquement associé est bijectif)

Proposition 10.

Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,p} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $D \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$, on peut calculer "par blocs" de la manière suivante :

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,p} & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)}$$

Proposition 11.

$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(AB) = \det(A)\det(B)$

Proposition 12.

$\forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

Définition 5.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **déterminant de Vandermonde** le scalaire noté $V(a_1, \dots, a_n)$ défini par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

lemme 13. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on a :*

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=2}^{n+1} (a_k - a_1) \times V(a_2, \dots, a_{n+1})$$

Proposition 14 (déterminant de Vandermonde).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\boxed{V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)}$$

.

Définition 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux matrices carrées M et N appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** (sur $\mathbb{K}$) , s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $N = P^{-1}MP$

Proposition 15.

Si M et N sont deux matrices semblables, alors $\det(M) = \det(N)$.

Définition 7.

Etant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n}$, on appelle **trace** de la matrice A le nombre, noté $\mathrm{Tr}(A)$ défini par : $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}}$

Proposition 16 (linéarité de la trace).

Pour tous $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda \, \mathrm{Tr}(B)$

Proposition 17 (trace de la transposée).

Pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\left(A^T\right) = \mathrm{Tr}(A)$

Proposition 18 (trace d'un produit).

Pour tous $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Proposition 19 (trace de matrices semblables).

Deux matrices semblables ont même trace.
i.e. : si $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifient $N = P^{-1}MP$, alors $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(M)$

Définition 8.

Etant donnés $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle **trace** de f le scalaire, noté $\mathrm{Tr}(f)$ défini par $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(Mat_{\mathcal{B}}(f))$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de l'espace vectoriel E de dimension finie.

Chapitre V Suites de fonctions

Définition 1.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions **bornées** de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge simplement** sur I vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$$

Définition 2.

Soit I un intervalle réel. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge uniformément** sur I vers la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t)-f(t)|\} = \|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Proposition 1.

Si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors (f_n) converge simplement sur I vers f.

Proposition 2.

Soient I un intervalle réel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I, qui converge uniformément sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est continue sur I.

Proposition 3.

Soient $I = [a,b]$ un segment, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.

Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 4 (de convergence dominée, admis).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;

ii) la suite (f_n) **converge simplement** sur I vers une fonction f **continue par morceaux sur** I ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$. (hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n,\text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ et } f \text{ sont intégrable sur } I}$,

la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n}$.

Proposition 5.

Soient I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, et telle que la suite (f'_n) de ses dérivées converge uniformément sur I vers $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.

Chapitre VI Séries de fonctions

Définition 1 (Sommes partielles).

Etant donnée une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $(S_N(\cdot))_{N\in\mathbb{N}}$ de ses fonctions **sommes partielles** par : $\forall N \in \mathbb{N},\ S_N : x \mapsto \sum_{k=0}^{N} u_k(x)$

Définition 2.

Soit I un intervalle réel, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ de fonctions **converge simplement** sur I si :
si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ CV
Si tel est le cas, on définit la **somme de la série de fonctions** $\sum_{n\geq 0} u_n(\cdot)$, notée $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$, par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n : I \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad .$$

Définition 3.

On dit qu'une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge uniformément** sur I intervalle réel vers sa somme S si : $\boxed{\sup_{t\in I}\left\{\left|\sum_{n=0}^{N} u_n(t) - S(t)\right|\right\} = \|S_N - S\|_{\infty,I} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}$

Définition 4.

$\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ **converge normalement** sur I si la série numérique (positive) $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_{\infty,I}$ converge.

Proposition 1 (CVN $\Rightarrow$ CVU, CVU $\Rightarrow$ CVS).

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ CVN sur I, alors elle converge uniformément.
Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ CVU sur I, alors elle converge simplement.

Proposition 2 (CVN via série majorante).

$\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ une série num. convergente et $\sum_{n\geq 0} u_n$ série de fonctions telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall x \in I,\ |u_n(x)| \leq \alpha_n)$
Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CVN sur I.

Proposition 3 (continuité de la somme).

Soient I un intervalle réel, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions **continues** sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ **CVU** sur I vers $S \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. Alors S est continue sur I.

Proposition 4 (Intégration terme à terme sur un segment).

Soient $I = [a,b]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions <u>continues</u> sur $[a,b]$, telle que la série $\sum u_n$ <u>**CVU**</u> sur $[a,b]$ vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$. Alors la série numérique $\sum \int_a^b u_n(t)\ \mathrm{d}t$ CV et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\ \mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)\ \mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\ \mathrm{d}t$$

Théorème 5 (d'intégration terme à terme sur un intervalle qcq).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est <u>**c.p.m.**</u> et <u>**intégrable**</u> sur I ;
ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ <u>**CVS**</u> sur I vers S **continue par morceaux sur** I ;
iii) la série num. $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge (domination)

Alors la somme S de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ $\boxed{\text{est intégrable sur } I}$, la série $\boxed{\sum_{n\geq 0}\int_I f_n \text{ CV}}$, et $\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t}$.

Proposition 6 (Dérivation terme à terme).

Soient I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que la série de fonctions $\sum u_n$ CVS sur I vers S, et telle que la série $\sum u_n'$ de ses dérivées <u>**CVU**</u> sur I vers T.
Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$.

Chapitre VII Réduction

Définition 1 (sous-espace vectoriel stable).

On dit qu'un s.-e.v. F de E est $\boxed{\text{stable par } u}$ si : $\boxed{u(F) \subset F}$

Proposition 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

Définition 2 (droite stable).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v}) = \{\alpha\overrightarrow{v};\ \alpha \in \mathbb{K}\}$ dirigée par un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$ est dite stable par u si : $u(D) \subset D$

Proposition 2.

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\overrightarrow{v} \in E$ un vecteur NON NUL, dirigeant la droite $D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v})$.
Alors D est stable par u si et seulement si $\exists\lambda \in \mathbb{K};\ u(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v}$.

Définition 3 (vecteur propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ est dit <u>**vecteur propre**</u> de u si

$$\begin{cases} & \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0_E} \\ \exists\lambda \in \mathbb{K}; & u(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v} \end{cases}$$

Pour un tel $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que le vecteur propre $\overrightarrow{v}$ est associé à la valeur (propre) λ.

Proposition 3.

Pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ NON NUL, on a l'équivalence entre :

i) $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$

ii) la droite $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\overrightarrow{v})$ est stable par u.

Définition 4 (valeur propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de u s'il existe un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ **NON NUL** tel que :

$$(1)\quad \begin{cases} \overrightarrow{v} & \neq & \overrightarrow{0} \\ u(\overrightarrow{v}) & = & \lambda\overrightarrow{v} \end{cases}$$

Pour un tel vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ (NON NUL), on dit que la valeur propre λ est associé au vecteur (propre) $\overrightarrow{v}$.

Proposition 4.

λ est valeur propre de u ssi $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est non inversible
λ est valeur propre de u ssi $\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0$

Définition 5 (spectre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre** de u dans $\mathbb{K}$ l'ensemble noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ défini par :

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \left\{\lambda \in \mathbb{K};\ \exists\overrightarrow{v} \in E \setminus \{\overrightarrow{0_E}\},\ u(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v}\right\}}$$

il s'agit de l'ensemble des valeurs propres de u appartenant à $\mathbb{K}$.

Définition 6 (sous-espace propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ une valeur propre de u.
On définit le **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ, noté $E_{u,\lambda}$ ou E_λ par :

$$\boxed{E_{u,\lambda} = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u) = \{\overrightarrow{v} \in E;\ u(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v}\}}$$

lemme 5. *Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, $E_{u,\lambda}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant au moins une droite stable engendrée par un vecteur propre $\overrightarrow{v}$ (non nul!!!) associé à λ.*
En particulier, $\boxed{\dim E_{u,\lambda} \geq 1}$

lemme 6. *$E_1, \dots E_n$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}$, on a :* $\det([C_1, \dots, C_n] - xI_n) =$
$\det([C_1 - xE_1, \dots, C_n - xE_n]) = \det([C_1, \dots, C_n])\ x^0 + \dots\ x^1 + \dots + (-1)^n \mathrm{Tr}([C_1, \dots, C_n])\ x^{n-1} + (-1)^n x^n$

Définition 7.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \det(x\mathrm{I}_n - A)$ est polynômiale de degré n en x. On la note χ_A, et le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ associé est appelé **polynôme caractéristique** de A.

Définition 8.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $x \mapsto \det(x\mathrm{id}_E - u)$ est polynômiale de degré n en x. On la note χ_u, et le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ associé est appelé **polynôme caractéristique** de u.

Définition 9 (multiplicité)**.**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$), et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u (resp. de A).
On appelle $\boxed{\text{multiplicité de la valeur propre } \lambda}$ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_u de u (resp. χ_A de A).
(i.e. m_λ est la puissance de $X - \lambda$ dans χ_u)

Proposition 7.

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension n. Le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé sur $\mathbb{C}$. Soient $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$.
Alors $\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = n$ et

$$\boxed{\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}}$$

Proposition 8.

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension n et son polynôme caractéristique scindé $\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}}$, avec $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$.
Alors $\boxed{\det(u) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_{\lambda_i}}}$ et $\boxed{\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} \lambda_i}$

Proposition 9.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$. Alors tout s.-e.v. stable par u est stable par v.

Proposition 10.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$. Alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Définition 10 (diagonalisabilité)**.**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u.

Proposition 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres associés dans cet ordre aux valeurs propres (répétées ou non) $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$.

Alors $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix} = D$ est une matrice diagonale. En outre, en notant P la matrice de passage de la base canonique de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

$$\boxed{P^{-1}AP = D}$$

$$\boxed{PDP^{-1} = A}$$

Définition 11 (diagonalisabilité)**.**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si l'endomorphisme u canoniquement associé est diagonalisable.

Proposition 12.

Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

lemme 13. *Toute famille de vecteurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.*

lemme 14. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $s \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux dictinctes de u.*
Alors la somme des sous-espaces propres est directe :
$\sum_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i} \subset E.$

Proposition 15 (dimension des s.e.p. et multiplicité)**.**

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, de multiplicité m_λ, et E_λ le sous-espace propre associé.
Alors $\boxed{1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda.}$

Théorème 16 (CNS de diagonalisabilité).

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_s}$, et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$ leurs sous-espaces propres respectifs.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$;

ii) $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}}$;

iii) $\boxed{\forall i \in [\![1, s]\!],\ \dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}}$ et $n = \sum_{i=1}^{s} \dim(E_{\lambda_i})$.

iv) $\boxed{\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda)}$.

Proposition 17 (CS de diagonalisabilité).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique χ_u.
Si $\boxed{\chi_u \text{ est } \textbf{scindé}}$ $\boxed{\textbf{à racines simples}}$ sur $\mathbb{K}$, alors $\boxed{u \text{ est } \textbf{diagonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$.

Proposition 18 (CS de diagonalisabilité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique χ_A.
Si $\boxed{\chi_A \text{ est } \textbf{scindé}}$ $\boxed{\textbf{à racines simples}}$ sur $\mathbb{K}$, alors $\boxed{A \text{ est } \textbf{diagonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$.

Définition 12.

Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Proposition 19.

$\boxed{\text{Si le polynôme caractéristique}}$ χ_A de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est $\boxed{\text{scindé}}$ (sur $\mathbb{K}$), alors $\boxed{A \text{ est trigonalisable.}}$
i.e. $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{K});\ T = P^{-1}AP$ triangulaire

Définition 13.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire.

Proposition 20.

Soit $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n, D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$ diagonale, alors

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = \begin{pmatrix} \delta_1^k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n^k \end{pmatrix}}$$

Proposition 21.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres associés dans cet ordre aux valeurs propres (répétées ou non) $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{K}^n$, $Mat_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_n \end{pmatrix} = D$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}}$$

Chapitre VIII Equations différentielles

Théorème 1 (EDL 1 à coef. constants avec second membre).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{K}$, et $g : I \to \mathbb{K}$ dérivable.
Notons $\boxed{(H) \ : \ y' - ay = 0}$ et $\boxed{(E) \ : \ y' - ay = g(t)}$.

• L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{f : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto \lambda e^{at},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.}$$

• Si y_P est une solution particulière de (E), l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{f : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{at},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.}$$

Théorème 2 (EDL 1 à coef. continus avec second membre).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{K}$ continue, et A une primitive (quelconque) de a sur I, et $g : I \to \mathbb{K}$ dérivable.
Notons $\boxed{(H) \ : \ y' - a(t)\ y = 0}$ et $\boxed{(E) \ : \ y' - a(t)\ y = g(t)}$.

• L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (H) est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{f : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto \lambda e^{A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.}$$

• Si y_P est une solution particulière de (E) , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{f : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.}$$

Théorème 3 (EDL 2 à coef. constants avec second membre).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b appartenants à $\mathbb{C}$, et $g : I \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable.
Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes de l'équation $r^2 - ar - b = 0$. Notons $\boxed{(H) \ : \ y'' - ay' - by = 0}$ et $\boxed{(E) \ : \ y'' - ay' - by = g(t)}$.

• Si $\boxed{r_1 \neq r_2}$ et y_P est une solution particulière de (E) :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C},H} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}}$$

et

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C},E} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.}$$

• Si $\boxed{r_1 = r_2}$ et y_P est une solution particulière de (E) :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C},H} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}}$$

et

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C},E} = \left\{f : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto y_p(t) + (\lambda + \mu t)e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.}$$

Proposition 4.

Pour une équation $(E) \ : \ y'' + by' + cy = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ de second membre de la forme $c(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $A, B, \omega, b, c \in \mathbb{R}$, on peut chercher une solution particulière y_p sous la forme : $y_p : t \longmapsto C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$

Proposition 5.

Soient $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^n$ et $D = Diag(d_1, \ldots, d_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $(z_{01}, \ldots, z_{0n}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de $Z_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Le problème de Cauchy

$$\boxed{(\mathcal{PC}) \begin{cases} Z' = D\,Z & (H) \\ Z(t_0) = Z_0 & (\mathcal{CI}) \end{cases}}$$

admet pour unique solution l'application

$$Z : t \longmapsto \begin{pmatrix} z_{01}e^{d_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ z_{0n}e^{d_n(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

Proposition 6 (cas complexe).

Soient $n \in \mathbb{N}$, et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **<u>diagonalisable</u>** ; notons $\boxed{X'(\cdot) = A\ X(\cdot) \quad (H)}$.
Soient $D = Diag(d_1, \ldots, d_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B}' = (V_i)_{1 \le i \le n} \in (\mathbb{C}^n)^n$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $AV_i = d_i V_i$, et $P = (V_1| \ldots |V_n) \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$, de sorte que $D = P^{-1}AP$.
Alors l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ de (H) est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{d_k t}\, V_k;\ (\mu_k)_{1 \le k \le n} \in \mathbb{C}^n \right\}$$

Pour trouver les solutions réelles, on remplace les paires de termes complexes conjugués par la somme de leurs parties réelles et imaginaires.

Définition 1.

On appelle système différentiel linéaire tout système d'équations de la forme $(\mathcal{E})$:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)\ x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)\ x_1(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)\ x_j(t) \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

ou encore, en notant $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

$$\boxed{X'(t) = A(t)\ X(t) + B(t)} \qquad (\mathcal{E})$$

où t désigne le temps, $B : t \longmapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction continue est connue, $X : t \longmapsto \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une fonction dérivable inconnue, et $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $t \longmapsto (a_{ij}(t))_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$

Définition 2.

Si en outre on impose une condition initiale, on parle de **problème de Cauchy** :

$$\boxed{(\mathcal{PC}) \left\{ \begin{array}{lcll} X'(t) & = & A(t)\ X(t) + B(t) & (\mathcal{E}) \\ X(t_0) & = & X_0 & (\mathcal{CI}) \end{array} \right.}$$

avec t_0 l'instant initial, et $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la position à l'instant initial.

Théorème 7 (Cauchy-Lipschitz linéaire (ADMIS, preuve HP))**.**

Soient I un intervalle réel, $t_0 \in I$ (un instant initial), $n \in \mathbb{N}^*$, $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (une position à l'instant initial), A, B deux fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Supposons que A et B sont **continues sur** I, alors le problème de Cauchy

$$\boxed{(\mathcal{PC}) \left\{ \begin{array}{lcll} X'(t) & = & A(t)\ X(t) + B(t) & (\mathcal{E}) \\ X(t_0) & = & X_0 & (\mathcal{CI}) \end{array} \right.}$$

admet une **unique solution** $X : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Proposition 8.

Soient I un intervalle réel, $t_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$et $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$. Notons $(\mathcal{H})$ $Z'(t) = A(t)\ Z(t)$, et $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.
Alors $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$ -e. v., et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_\mathcal{H} \\ Z_0 & \longmapsto & Z \end{array}$,
avec Z la solution du pb de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} Z' = A(t)Z \\ Z(t_0) = Z_0 \end{array} \right.$
est un isomorphisme. Ainsi $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ **est un** $\mathbb{K}$**-e.v. de dimension** n.

Proposition 9 (principe de superposition)**.**

Soient I un intervalle, $t_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.
Notons $(\mathcal{E})$ $X'(t) = A(t)\ X(t) + B(t)$, et $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$. Soit $(\mathcal{H})$ l'équation homogène associée , et $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ l'ensemble de ses solutions.
Si $X_p : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ est une solution de $(\mathcal{E})$, alors $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{X : t \longmapsto X_p(t) + Z(t);\ Z \in \mathcal{S}_\mathcal{H}\}$
Ainsi $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ **est un espace affine de dimension** n**, passant par** X_p **et dirigé par l'e. v.** $\mathcal{S}_\mathcal{H}$.

Théorème 10 (de Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre 2)**.**

Soient $t_0 \in I$, et $x_0, v_0 \in \mathbb{K}$, $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ continues et supposons que $\boxed{a \text{ ne s'annule pas sur } I}$. Alors
le pb de Cauchy (PC) $\left\{ \begin{array}{lcl} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y & = & d(t) \\ y(t_0) & = & x_0 \\ y'(t_0) & = & v_0 \end{array} \right.$
admet une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$.

Proposition 11.

Notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).
1) Pour $t_0 \in I$ fixé, l'application
$\varphi_{t_0} : \mathcal{S}_H \longrightarrow \mathbb{K}^2;\ y \longmapsto (y(t_0), y'(t_0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.
2) $\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2.

Proposition 12.

Notons $\mathcal{S}_L$ l'ensemble des solutions de (L).
Soit y_p une solution de (L). Alors $\mathcal{S}_L = \{y_p + q;\ q \in \mathcal{S}_H\}$
i.e. $\mathcal{S}_L$ est l'espace affine de dimension 2.

Chapitre IX Espaces probabilisés

Définition 1.

Si Ω est un ensemble, on appelle **tribu** des **évènements** sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
3. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

Définition 2 (Evènements incompatibles)**.**

Deux évènements. A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 3.

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbf{P} \colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
2. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles,
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Définition 4.

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 5 (Loi d'une variable aléatoire discrète)**.**

Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.
Sa loi est la donnée des $\mathbf{P}(\{X = k\})$ pour $k \in X(\Omega)$, on la note $\mathbf{P}_X$, et on peut la définir comme suit :
$\forall k \in X(\Omega),\ \mathbf{P}_X(\{k\}) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\})$
$= \mathbf{P}(\{X = k\}) = \mathbf{P}(X^{-1}(\{k\}))$

Théorème 1.

Si X prend ses valeurs dans $\{\ x_n\ ;\ n \geqslant 0\ \}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 6.

On appelle loi de Bernoulli de paramètre réel $p \in [0, 1]$ la loi, notée $b(p)$, définie pour $X \hookrightarrow b(p)$ par :

$$P(\{X = 0\}) = (1 - p) \text{ et } P(\{X = 1\}) = p$$

Définition 7.

On appelle loi binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ la loi, notée $\mathcal{B}(N, p)$, définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$ par :

$$\forall k \in [\![0, N]\!],\ P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$$

Définition 8.

On appelle loi géométrique de paramètre réel p la loi, notée $\mathcal{G}(p)$, définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(\{X = k\}) = (1 - p)^{k-1} p$$

Définition 9.

On appelle loi de Poisson de paramètre réel λ la loi, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ par :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Proposition 2.

$\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Proposition 3 (Continuité croissante :).

si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Proposition 4 (Continuité décroissante :).

si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Proposition 5 (Sous additivité :).

si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Définition 10.

Si A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

Définition 11 (Indépendance de deux événements).

Deux évènements A et B sont dits indépendants si $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(B)$.

Proposition 6.

Si $\mathbf{P}(B) > 0$, A et B indépendants ssi $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

Définition 12 (Indépendance 2 à 2).

Des évènements $A_1, \dots, A_n$ sont dits **deux à deux indépendants** si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\times\mathbf{P}(A_j)$

Définition 13 (Indépendance mutuelle).

Des évènements $A_1, \dots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie J non vide de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbf{P}(A_j)$$

Proposition 7 (Formule des probabilités composées).

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements tels que $\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \neq 0$. Alors $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbf{P}_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$

Définition 14.

Système complet dénombrable d'événements. Une famille dénombrable $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènement est dite **système complet dénombrable d'événements si :**

$\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ **et,**

$\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$

Proposition 8 (Formule des probabilités totales).

si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum \mathbf{P}(B\cap A_n)$ converge et

$$\boxed{\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\,\mathbf{P}(A_n)}$$

Proposition 9 (Formule de Bayes).

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$.

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$, $\boxed{\mathbf{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\,\mathbf{P}(A_n)}}$

Chapitre X Séries entières

Définition 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$. On appelle **série entière** (de la variable complexe z) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n(\cdot)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_n\ z^n \end{array}$$

On la note parfois (abusivement) $\sum_{n\geq 0} a_n\ z^n$

Proposition 1 (Lemme d'Abel).

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ et $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 2 (Rayon de convergence).

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$. On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ le nombre $R \in \mathbb{R}^+$ défini par :
$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+;\ \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$.

Proposition 2.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$, et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Définition 3.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$, et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. On appelle **disque ouvert de convergence** l'ensemble noté $D(0,R)$ défini par :

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$$

Proposition 3 (à savoir redémontrer).

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\sum a_n z^n$ converge, alors $R \geq |z|$
2. Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $\sum a_n z^n$ diverge, alors $R \leq |z|$

Proposition 4 (HP (à savoir redémontrer)).

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ **qui ne s'annule jamais**, et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
Pour $z \neq 0$, et $n \in \mathbb{N}$ on pose $\alpha_n = a_n z^n$.
Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}\ z^{n+1}}{a_n\ z^n}\right| = \ell|z|$.
Pour tout z tel que $|z| < \frac{1}{\ell}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est ACV, donc $R \geq \frac{1}{\ell}$.
Pour tout z tel que $|z| > \frac{1}{\ell}$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est GDV, donc $R \leq \frac{1}{\ell}$.
Ainsi R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $R = \frac{1}{\ell}$.

Proposition 5 (Série entière géométrique).

La série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
Pour tout $z \in D(0,1)$, on a $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Proposition 6 (Série entière exponentielle).

La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, sa somme $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Proposition 7 (Continuité de la somme).

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$.

Proposition 8.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Proposition 9 (comparaison).

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b. Alors :

i) si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;

ii) si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Proposition 10.

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b. Alors le rayon de convergence R de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie l'inégalité : $\boxed{R \geq \min(R_a, R_b)}$

En outre, il y a égalité si et seulement si $R_a \neq R_b$.

Enfin, $\forall z \in D(0,R)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Proposition 11 (Rayon de convergence du produit de Cauchy).

Etant données deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence R_a et R_b, le rayon de convergence R_c de leur **produit de Cauchy** $\sum_n c_n z^n$ vérifie $R_c \geq \min(R_a, R_b)$, (où $\forall n\ c_n = \sum_{k=0} a_k b_{n-k} = \sum_{p,q\in\mathbb{N};\ p+q=n} a_p b_q$). En outre, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_c$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p} z^k \right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q \right)$$

Théorème 12 (Convergence normale).

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R, et $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa somme, avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n : t \mapsto a_n t^n$.

Alors pour tout segment $K = [-a, a] \subset]-R, R[$, pour $0 \leq a < R$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur K.

Théorème 13 (Continuité de la somme sur l'ouvert de cvce).

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$.

Alors sa somme $f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie et continue sur $]-R, R[$.

Théorème 14 (intégration t à t d'1 somme de série entière).

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et f sa somme. Alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ a un rayon de convergence R. De plus, toute primitive F sur $]-R, R[$ de $f :]-R, R[\to \mathbb{C},\ t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de la forme :

$$F :]-R, R[\to \mathbb{C},\ t \mapsto F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Théorème 15 (dérivation t à t d'1 somme de série entière).

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et S sa somme. Alors

1) $S :]-R, R[\to \mathbb{C}$ est dérivable sur $]-R, R[$ et

$$\forall t \in]-R, R[, \boxed{S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} t^m}.$$

2) S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$S^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k} t^m$$

Définition 4.

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ définie sur un intervalle I contenant 0 est dite développable en série entière s'il existe un réel $r > 0$ et une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que : $]-r, r[\subset I$ et

$$\boxed{\forall t \in]-r, r[, \ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ t^n}$$

Proposition 16 (unicité du DSE).

Soit S la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. On a : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

En particulier, si $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est DSE sur un intervalle non vide $]-r, r[$, avec $R < 0$ et si $f(t) = 0, \ \forall t \in]-R, R[$, alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = 0}$

Proposition 17.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[, \ \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n}$$

Proposition 18.

La fonction $f : t \mapsto \exp(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
De plus elle vérifie l'équation différentielle $y' = y$, avec la condition initiale $y(0) = 1$, donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ e^t = \exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}}$$

Proposition 19.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto (1+t)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et
$\forall t \in]-1, 1[$,

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$$

Proposition 20.

$$\boxed{\sin t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ t^{2p+1}}{(2p+1)!}}, \ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cos t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ t^{2p}}{(2p)!}}, \ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$e^{tz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} t^k, \ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ avec } z \in \mathbb{C} \text{ fixé}}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}}, \ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!}}, \ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^p, \ \underline{\text{pour tout } t \in]-1, 1[}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-t} = \sum_{p=0}^{+\infty} t^p}, \ \underline{\text{pour tout } t \in]-1, 1[}$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p}, \ \text{pour tout } t \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} t^{2p}, \ \text{pour tout } t \in]-1, 1[$$

$$\boxed{\ln(1+t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1} t^p}{p}}, \ \underline{\text{pour tout } t \in]-1, 1]}$$

$$\ln(1-t) = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p}, \ \text{pour tout } t \in [-1, 1[$$

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{2p+1}}, \ \text{pour tout } t \in [-1, 1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^{2n}, \ \forall t \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^{2n}, \ \forall t \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n, \ \text{pour tout } t \in]-1, 1[$$

(car $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$)

$$\operatorname{Arcsin}(t) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \ \forall t \in]-1, 1[$$

Chapitre XI Isométries, endomorphismes symétriques

Définition 1.

Une application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$ si $\forall y, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x; y + \lambda z >=< x; y > +\lambda < x; z >$ et $< x + \lambda y; z >=< x; z > +\lambda < y; z >$

Définition 2 (Produit scalaire)**.**

L'application $< \bullet; \bullet >: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** réel si :

i) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{symétrique}}$ (i.e. $\forall v, w \in E, < w; v >= < v; w >$) ;

ii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{bilinéaire}}$

iii) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{positive}}$ (i.e. $\forall v \in E, < v; v > \geq 0$) ;

iv) $< \bullet; \bullet >$ est $\boxed{\textbf{définie}}$ (i.e. $\forall v \in E, (< v; v >= 0 \Rightarrow v = 0_E)$) ;

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel PCSI))**.**

E espace vectoriel muni du p.s. $< \bullet; \bullet >$. Alors $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ | < u|v > | \leq \sqrt{< u|u >}\sqrt{< v|v >}}$
en particulier, si $\| \ \| : x \mapsto \sqrt{< x|x >}$, on a : $\boxed{\forall (u, v) \in E^2,\ | < u|v > | \leq \|u\|\ \|v\|}$.
En outre, il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Définition 3.

Si $< \bullet; \bullet >$ est un produit scalaire sur E on dit que l'application $\| \ \| :\ x \mapsto \sqrt{< x; x >}$ est
la **norme associée**

Proposition 2 (propriétés de la norme associée à un p.s.)**.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $< ; >$ et $\| \ \|$ la norme associée.
L'application $\| \ \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés (caractiérisant une **norme**) :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;

ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;

iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénéité) ;

iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

Proposition 3 (propriétés de la norme associée à un p.s.)**.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $< ; >$ et $\| \ \|$ la norme associée.
Pour tous vecteurs u et v on a :

$$< u + v|u + v >= \|u\|^2 + 2 < u|v > +\|v\|^2$$

$$< u - v|u - v >= \|u\|^2 - 2 < u|v > +\|v\|^2$$

Définition 4.

Une famille $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, est dite **orthogonale** si :
$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow < x_i|x_j >= 0$

Proposition 4.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Théorème 5 (de Pythagore)**.**

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.

Définition 5 (B.O.N.)**.**

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite base orthonormée si elle est libre et génératrice et vérifie :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ < e_i|e_j >= \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 6 (coordonnées dans une b.o.n).

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E de coordonnées respectives dans cette base $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{< x|y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\ y_k}$$

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}$$

Remarque 2. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots y_n \end{pmatrix}$, le calcul de $< x|y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R}$ s'identifie au calcul matriciel $X^T Y = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) \in \mathfrak{M}_{11}(\mathbb{R})$.

Proposition 7 (Algorithme de $\boxed{\textit{Gram-Schmidt}}$).

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de vecteurs de E.

En posant, $\boxed{e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1}$, et pour i allant de 2 à n,

$\boxed{e'_i = f_i - \sum_{\ell=1}^{i-1} < e_\ell | f_i > e_\ell \text{ et } e_i = \frac{1}{\|e'_i\|} e'_i}$,

la famille $\boxed{\mathcal{B}_{GS} = (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base orthonormée}}$.

En outre $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$.

Définition 6 (orthogonal d'un s.e.v.).

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle sous-espace (vectoriel) **orthogonal** l'ensemble, noté $F^\perp$ défini par :
$F^\perp = \{y \in E;\ \forall x \in F,\ < x|y >= 0\}$.

Définition 7 (s.e.v. orthogonaux).

On dit deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **orthogonaux** si : $\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ < f|g >= 0$.

Proposition 8 (somme directe orthogonale).

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E **orthogonaux**, alors la somme $F + G$ est directe. On dit qu'elle est **directe orthogonale**, et on note $F + G = F \oplus G = F \oplus^\perp G$.

dém : Pour $x \in F \cap G$, on a $< x|x >= 0$, donc $x = 0_E$. □

Proposition 9 (projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie)

Soit $(E, <\ |\ >)$ un espace préhilbertien (réel, de dimension quelconque) et V un s.e.v. de E de **dimension finie**.
Pour tout $x \in E$, il **existe** un **unique** élément $y \in V$ tel que $x - y \in V^\perp$; il est noté $y = P_V(x)$ et est appelé $\boxed{\textbf{projeté orthogonal}}$ de x sur V.
En outre, si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base <u>**orthonormale de V**</u>, alors

$$\boxed{P_V(x) = \sum_{j=1}^{n} < u_j | x > u_j.}$$

Proposition 10 (somme directe orthogonale).

Pour E de dimension finie, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\boxed{E = F \oplus^\perp F^\perp}$.
$\boxed{\dim(F^\perp) = \dim E - \dim(F)}$

Proposition 11 (inégalité de Bessel).

Si V un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de l'espace vectoriel E et $x \in E$ fixé.
Alors :

$$\forall x \in E,\ \|x\| \geq \|P_V(x)\|$$

De plus le vecteur $P_V(x)$ est l'unique vecteur $y_0 \in V$ tel que $\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$

Chapitre XII Séries génératrices

Définition 1 (Fonction de répartition)**.**

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire réelle discrète X la fonction :$F_X : t \mapsto \mathbf{P}(\{X \leq t\})$

Proposition 1.

F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$, $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$,

Définition 2.

Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\ t^n.$$

Proposition 2.

La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1, auquel cas, $\mathbf{E}(X) = G'_X(1)$.
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Proposition 3.

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes**, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

Définition 3.

On appelle loi géométrique de paramètre réel p la loi, notée $\mathcal{G}(p)$, définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(\{X = k\}) = (1-p)^{k-1}p$$

Proposition 4.

Pour X de loi $\mathcal{G}(p)$, on a :
$\mathbf{E}[X] = \dfrac{1}{p}$, $\mathbf{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$, $G_X(s) = \dfrac{ps}{1-(1-p)s}$

Proposition 5 (La loi Géométrique est sans mémoire)**.**

Si $\mathbf{P}$ est la loi d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est géométrique si et seulement si

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbf{P}(X > k).$$

Définition 4.

On appelle loi de Poisson de paramètre réel λ la loi, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ par :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Proposition 6.

Pour X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a :
$\mathbf{E}[X] = \lambda$, $\mathbf{V}[X] = \lambda$, $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

Proposition 7 (additivité de poissons indépendantes)**.**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont deux v.a. indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Chapitre XIII Fonctions de 2 ou 3 variables, surfaces

Définition 1.

Soit a un point de E, $j \in [\![1,p]\!]$, et $f : E \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à sa j^{me} coordonnée x_j si la limite suivante existe et est finie (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(a+h\overrightarrow{e_i}) - f(a)\right)$$

Si tel est le cas on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ la valeur de cette limite.

Définition 2.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E. Une application $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si ses applications dérivées partielles $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(u)$, pour $j \in [\![1,p]\!]$, existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Proposition 1.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
L'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 2 (D.L. d'ordre 1)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1\leq i\leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Alors

$$f(a+\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o\left(\|\overrightarrow{h}\|_2\right)$$

Définition 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle (vecteur) **gradient** de f en a le vecteur, noté $\overrightarrow{\mathrm{Grad}} f(a)$, correspondant au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Proposition 3 (D.L. d'ordre 1)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1\leq i\leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Alors pour $\overrightarrow{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$, on a avec la notation $(\ |\ )$ pour le produit scalaire usuel :

$$f(a+\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{=} f(a) + (\overrightarrow{\mathrm{Grad}} f(a)|\overrightarrow{h}) + o\left(\|\overrightarrow{h}\|_2\right)$$

Définition 4.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle **différentielle** de f en a l'application linéaire appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$, noté $\mathrm{d}f(a)$, définie par :

$$\mathrm{d}f(a) :\ (h_1,\dots,h_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Proposition 4 (D.L. d'ordre 1)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1\leq i\leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Alors pour $\overrightarrow{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$f(a+\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \bullet \overrightarrow{h} + o\left(\|\overrightarrow{h}\|_2\right)$$

Proposition 5 (dérivée partielles de fonctions composées)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V},\ (u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$
et $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y)$, et $g : (u,v) \longmapsto f(x(u,v), y(u,v))$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Proposition 6 (utilisation des coordonnées polaires)**.**

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $(0,0)$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V},\ (\rho,\theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$
et $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y)$, et
Pour $g : (\rho,\theta) \longmapsto f((\rho\cos\theta, \rho\sin\theta))$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \times \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \times \sin\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \times (-\rho\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \times \rho\cos\theta$$

Proposition 7 (changement de variables affine).

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a, b, c, d quatre réels tels que Si $ad - bc \neq 0$, et $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V},\ (u, v) \longmapsto (au + bv, cu + dv)$ et $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto f(x, y)$, et
$g : (u, v) \longmapsto f(au + bv, cu + dv)$
On a
$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times a + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times b$
et
$\dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times c + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times d$

Définition 5.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Une application $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(u)$, $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial z}(u)$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Théorème 8 (De Schwarz).

Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors pour tous $i, j \in [\![1, 3]\!]$, et tout $a \in \mathcal{U}$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

lemme 9. *Soit* $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u, v) \longmapsto h(u, v)$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$. *Pour tous* $(x_0, y_0), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$h(x, y) = h(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, v)\mathrm{d}v + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial h}{\partial x}(u, y_0)\mathrm{d}u$$

Définition 6.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle **équation aux dérivées partielles** d'ordre 1 toute équation, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ faisant intervenir les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Proposition 10.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ de l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y) \quad (1)$$

sont de la forme $f : (x, y) \longmapsto K(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s, y)\ \mathrm{d}s$, avec K de classe $\mathcal{C}^1$.

exemple 1. l'EDP d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \tilde{0}}$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a pour ensemble de solutions

$$\left\{(x, y) \longmapsto x\ G(y) + K(y);\ G, K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right\}$$

Définition 7.

Etant donnée $\mathcal{C}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle **point régulier** tout point $M = (x_0, y_0)$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et tel que $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq (0, 0)$.

Proposition 11.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$, la tangente à la courbe au point régulier $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation cartésienne :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Définition 8.

Etant donnée $\mathcal{S}$ est une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on appelle **point régulier** tout point $M = (x_0, y_0, z_0)$ un point tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et tel que $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M), \dfrac{\partial f}{\partial y}(M), \dfrac{\partial f}{\partial z}(M)) \neq (0, 0, 0)$.

Proposition 12.

Si $\mathcal{S}$ est une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, le plan tangent à la surface au point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan d'équation cartésienne :
$(x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$
$+ (z - z_0)\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$

Proposition 13.

Cas particulier : $z = f(x, y)$.
le plan tangent à la surface au point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan d'équation cartésienne :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

Définition 9.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$. On dit que f admet un **minimum**, (resp. maximum) **local** en a, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
$\forall x \in \mathcal{U},\ \|x-a\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)
Si f admet un maximum ou un minimum local en a , on dit que f admet un extremum local.

Définition 10.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$. On dit que f admet un **minimum**, (resp. maximum) **global** en a, si :
$\forall x \in \mathcal{U}, f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)
Si f admet un maximum ou un minimum global en a , on dit que f admet un extremum global.

Proposition 14.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$. Si f admet un extremum en a, alors a est un point critique (i.e. $\overrightarrow{\mathrm{Grad}} f(a) = \overrightarrow{0}$)

Définition 11.

Si $\Gamma = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)); t \in I\}$ est une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$, contenue dans $\mathcal{S}$ d'équation $f(x,y,z) = 0$, alors la tangente à en un point $M = \gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ appartient au plan tangent à la surface, et est la droite dirigée par le vecteur $\gamma'(t_0)$ et passant par M_0.

Proposition 15 (ligne de niveau)**.**

Si $\mathcal{C}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x,y) = K$, pour $K \in \mathbb{R}$ constante fixée, alors pourtout point M de $\mathcal{C}$, et pour tout vecteur $\overrightarrow{T}_M$ tangent à la courbe en M, on a :
$\overrightarrow{\mathrm{Grad}} f(M) \perp \overrightarrow{T}_M$.

Proposition 16.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe de l'espace paramétrée par $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$, et tracée sur la surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x,y,z) = 0$, alors la tangente à $\mathcal{C}$ au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ est orthogonale au gradient de f.

Chapitre XIV Intégrales à paramètre

Théorème 1 (de continuité d'une intégrale à paramètre).

Soient I et J deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et
$f : I \times J \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in I$, $f_{x,\bullet} : J \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux** sur J ;
(f cont. p. morc. % à t)

ii) pour tout $t \in J$, $f_{\bullet,t} : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x,t)$ est **continue** sur I ; (f continue % à x)

iii) il existe une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur J telle que :

$$\forall\ (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

(hypothèse de domination de $f(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % à t)

Alors $\boxed{g : I \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \int_J f(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ est continue sur } I.}$

Théorème 2 (de dérivation d'une intégrale à paramètre).

Soient I et J deux **intervalles** de $\mathbb{R}$,
et $f : I \times J \to \mathbb{K},\ (x,t) \mapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in I$ la fonction $\begin{array}{rcl} f_{x,\bullet} : J & \to & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux intégrable** sur J ;

ii) Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

iii) pour tout $x \in I$ la fonction $\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,\bullet} : J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** sur J ;

iv) il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ **positive**, **continue par morceaux** et **intégrable** sur J telle que :
pour tout $(x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.
(hypothèse de domination de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % t)

Alors $\boxed{G : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto \int_J f(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I}$

et pour tout $x \in I$ on a $\boxed{G'(x) = \int_J \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t}$.

Théorème 3 (de dérivations successives d'intégrale à param.).

Soient I et J deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, k un entier naturel, et $f : I \times J \to \mathbb{K},\ (x,t) \mapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in I$ la fonction $\begin{array}{rcl} f_{x,\bullet} : J & \to & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux intégrable** sur J ;

ii) Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

iii) pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et tout $x \in I$ la fonction $\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}\right)_{x,\bullet} : J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** sur J ;

iv) il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}$ **positive**, **continue par morceaux** et **intégrable** sur J telle que :
pour tout $(x,t) \in I \times J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.
(hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % t)

Alors $\boxed{g : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto \int_J f(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I}$

et pour tout $x \in I$ on a $\boxed{g^{(i)}(x) = \int_J \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\ \mathrm{d}t}$, $\forall i \in [\![1,k]\!]$.

Chapitre XV Couples et suites de variables aléatoires

Définition 1 (Couple de variables aléatoires discrètes).

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, l'application **couple** notée (X, Y) définie par $(X, Y) : \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire sur Ω, à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Définition 2.

Etant donnnées X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, leur **loi conjointe** est la loi de la variable aléatoire (X, Y), définie par : $\forall x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$,
$\mathbf{P}(\{(X,Y) = (x,y)\}) = \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$
Les lois $\mathbf{P}_X$ de X et $\mathbf{P}_Y$ de Y sont appelées les **lois marginales** de (X, Y).

Définition 3.

Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(\{X = x\}) > 0$.
On appelle **loi conditionnelle de** Y **sachant** $\{X = x\}$ la loi de probabilité définie pour les $y \in Y(\Omega)$ par $\mathbf{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$.

Définition 4.

Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sont dites **indépendantes** si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

Proposition 1.

Soient X et Y v.a. indépendantes. Alors :
i) $\forall A \subset X(\Omega)$ et $\forall B \subset Y(\Omega)$,
$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\ \mathbf{P}(Y \in B)$

ii) pour toutes fonctions f et g, les v.a. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Définition 5 (Variables mutuellement indépendantes).

Des variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ sont dites **mutuellement indépendantes** si : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, $\mathbf{P}((X_i)_{1 \le i \le n} = (x_i)_{1 \le i \le n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i)$

Définition 6 (Suite de variables aléatoires indépendantes).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
- On dit que les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **deux à deux indépendantes** si $\forall j \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.
- On dit que les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendantes** si pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, les $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Définition 7.

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n\,;\, n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum_{n \geq 0} x_n\ \mathbf{P}(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathbf{E}(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$.

Proposition 2.

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$.

Théorème 3 (Théorème du transfert).

Si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a :

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n).$$

Proposition 4 (Linéarité de l'espérance).

Pour tous X, Y variables aléatoires et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbf{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$$

Proposition 5.

Positivité, croissance de l'espérance. Pour tous X, Y variables aléatoires et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
- Si X est à valeurs positives, alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$
- Si $X(\omega) \leq Y(\omega),\ \forall \omega \in \Omega$, alors $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$

Proposition 6.

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** alors, pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont **indépendantes** .

Proposition 7.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** admettant des espérances et telles que XY admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

Proposition 8.

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.

Définition 8.

Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$.
L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

Proposition 9.

Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, on a : $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\,\mathbf{V}(X)$.

Définition 9 (Covariance)**.**

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$
$= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$

Proposition 10.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètesadmettant des variances, alors
$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Proposition 11.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** admettant des variances, alors
$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Proposition 12 (coefficient de corrélation)**.**

Pour $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\ \mathbb{V}(Y)}}$, on a $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$

Proposition 13 (Inégalité de Markov)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance finie.

Alors pour tout $t > 0$, on a $\boxed{\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbf{E}(|X|)}{t}}$

Corollaire 14.

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.
Alors pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbf{E}(X^2)}{t^2}$

Proposition 15 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\boxed{\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}}$

Proposition 16 (Approximation binomiale par Poisson)**.**

Si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$

Théorème 17 (Loi faible des grands nombres)**.**

si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbf{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Chapitre XVI Arcs paramétrés

Définition 1.

On appelle **arc paramétré** toute application $\gamma : I \longrightarrow E$ continue, avec I intervalle réel.

Définition 2.

On appelle **arc plan** toute application $F : I \longrightarrow \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ continue.
On dit alors que F est une paramétrisation de $\Gamma = \{F(t),\ t \in I\}$.

Définition 3.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un arc paramétré $\gamma : I \to E$ est dit **de classe** $\mathcal{C}^k$ si γ est de classe $\mathcal{C}^k$.
On dit alors que γ est une paramétrisation de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe $\Gamma = \gamma(I)$

Définition 4.

Un arc paramétré $\gamma : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dit **régulier** si $\gamma' : I \to E$ ne s'annule pas sur I.

Définition 5.

Soit $\gamma : I \to E$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout t_0 de I, le **vecteur vitesse** à l'instant t_0 est le vecteur $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$.

Définition 6.

Soit $\gamma : I \to E$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout t_0 de I, la **tangente** à la courbe au point de paramètre t_0 est la droite passant par le point $\gamma(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$

Proposition 1 (D.L.1)**.**

Soit $\gamma : I \to E$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Au voisinage de t_0 dans I, on a :
$\gamma(t) \underset{t \to t_0}{=} \gamma(t_0) + (t - t_0)\ \gamma'(t_0) + \overrightarrow{o}((t - t_0))$
ou encore
$\gamma(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} \gamma(t_0) + h\ \gamma'(t_0) + \overrightarrow{o}((h))$

Proposition 2.

Soient E euclidien, $f : I \to E$ dérivable, et $L \in \mathcal{L}(E)$.
Alors $L \circ f : I \to E$ est dérivable sur I, et :

$$\forall t \in I,\ (L \circ f)'(t) = L(f'(t))$$

Proposition 3.

Soient E, F euclidien, $f, g : I \to E$ dérivable, et $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire.
Alors $B(f, g) : I \to F,\ t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I, et :

$$\forall t \in I,\ (B(f(t), g(t)))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

Proposition 4.

Soient I, J deux intervalles réels, E euclidien, $f : I \to E$ dérivable et $\varphi : J \to I$ dérivable.
Alors $f \circ \varphi : J \to E,\ t \mapsto f(\varphi(t))$ est dérivable sur J, et :

$$\forall s \in J,\ (f(\varphi(s)))'(s) = \varphi'(s)\ f'(\varphi(s))$$

Chapitre XVII Topologie : convexes, formes bilinéaires

Définition 1.

Soit Δ une partie de E.
On appelle **adhérence** de Δ l'ensemble $\overline{\Delta}$ constitué des points adhérents à Δ.
On appelle **intérieur** de Δ l'ensemble Δ° constitué des points intérieurs à Δ.
On appelle **frontière** de Δ l'ensemble $\partial\Delta$ constitué des points adhérents non intérieurs à Δ.

Proposition 1.

Si (X_n) est une suite de Δ qui converge vers X, alors $X \in \overline{\Delta}$.
En particulier toute limite de suite de points d'un fermé appartient à ce fermé.

Définition 2.

Une partie $\mathcal{A}$ de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est dite **bornée** si : $\exists M \in \mathbb{R}^+;\ \forall x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq M$

Définition 3.

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Une application $f : E \to F$ est dite **bornée** si : $\exists M \in \mathbb{R}^+;\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq M$

Proposition 2.

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est **continue**, alors les ensembles $\{X \in E;\ f(X) > 0\}$ et $\{X \in E;\ f(X) < 0\}$ sont des ouverts.

Théorème 3 ((non exigible)).

Soient E e.v.n. de dimension finie, $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Si K est un fermé borné de E, alors f est bornée sur K et y atteint ses bornes : Il existe $x_0, x_0' \in K$ tels que

i) $f(x_0) = \inf\{f(x);\ x \in K\} = \min\{f(x);\ x \in K\}$

ii) $f(x_0') = \sup\{f(x);\ x \in K\} = \max\{f(x);\ x \in K\}$

Définition 4.

Une partie C de E est dite convexe si

$$\forall A, B \in C,\ \forall t \in [0,1],\ t(A) + (1-t)B \in C$$

Proposition 4.

Toute boule ouverte est convexe.
Toute boule fermée est convexe.

Théorème 5.

Soient $(E, \| \ \|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de **dimension finie** et $(F, \| \ \|_F)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est lipschitzienne.
Toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue sur E.

Définition 5.

Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $\beta : E \times F \to G$ est dite bilinéaire si : $\forall (x, x', y, y', \lambda) \in E \times E \times F \times F \times \mathbb{K}, \beta(\lambda x + x', y) = \lambda\beta(x', y) + \beta(x', y)$ et $\beta(x, \lambda y + y') = \lambda\beta(x, y) + \beta(x, y')$

Théorème 6.

Soient $(E, \| \ \|_E)$, des $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de **dimensions finies** et $(F, \| \ \|_F)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Toute application n-linéaire en dimension finie est continue sur E^n.

Théorème 7.

Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$, $(G, \| \ \|_G)$ des $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de **dimensions finies**
Toute application bilinéaire en dimension finie $u \in \mathcal{B}il(E \times F, G)$ est continue sur $E \times F$.